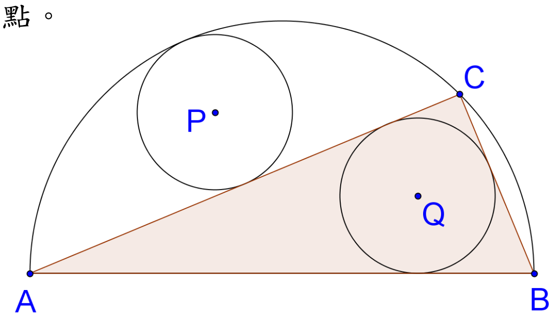
北一女中 102 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

第四期題目：

2014 年 03 月 14 日下午 1 點鐘截止

4-1 如果整數 a,b 使得 a^2+2b 是完全平方數，
請證明：a^2+b 必定可以表示成兩個完全平方數之和。

4-2 如右圖，以 $\overline{AB}$ 為直徑作半圓，C 為半圓上一點。
在弓形 AC 內作一最大內切圓（圓心為 P），
再作 $\triangle ABC$ 的內切圓（圓心為 Q）。
如果這兩個圓的半徑都是 4，
試求 $\overline{AB}$ 的長度。



4-3 假設 n 為 1000 以上的正整數。如果把 n 的最後三位數字刪掉，所得的新正整數恰好是 n 的立方根，試求正整數 n。

4-4 遞迴數列 $\langle a_n \rangle$ 的定義為：$\begin{cases} a_1=\dfrac{3}{2} \\ a_{n+1}=\sqrt{{a_n}^2-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}}, \text{其中 } n\in\mathbb{N} \end{cases}$，試求出 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2014} a_k = a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{2014}$ 的值。

4-5 已知聯立方程式 $\begin{cases} x^3-5xy^2=21 \\ y^3-5x^2y=28 \end{cases}$ 恰好有三組不同的實數解 $(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2),(\alpha_3,\beta_3)$，試求 $(4+\dfrac{\alpha_1}{\beta_1})(4+\dfrac{\alpha_2}{\beta_2})(4+\dfrac{\alpha_3}{\beta_3})$ 之值。

4-6. 已知 x 是實數。若 x^2+x 與 x^3 都是有理數，請證明：x 一定也是有理數。