北一女中 101 學年度下學期《數戰數決》有獎徵答活動

第四期解答：

4-1　如果整數 a,b 使得 a^2+2b 是完全平方數，

　　請證明：a^2+b 必定可以表示成兩個完全平方數之和。

解：

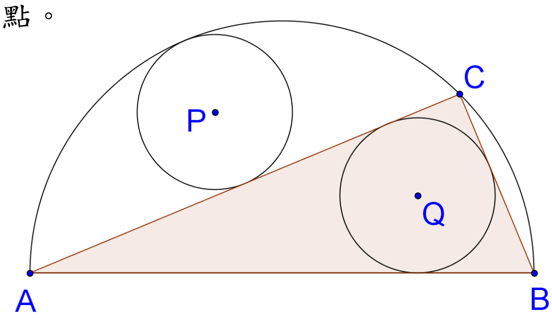
假設 $a^2+2b=n^2$，則 $n^2-a^2=2b$ 為偶數。

所以 n、a 同時為奇數或同時為偶數 $\Rightarrow n-a,n+a$ 都是偶數。

於是 $a^2+b=a^2+\dfrac{n^2-a^2}{2}=\dfrac{n^2+a^2}{2}=(\dfrac{n-a}{2})^2+(\dfrac{n+a}{2})^2$，

$\Rightarrow a^2+b$ 可表示為 $\dfrac{n-a}{2}$ 與 $\dfrac{n+a}{2}$ 這兩個整數的平方和。

4-2 如右圖，以 $\overline{AB}$ 為直徑作半圓，C 為半圓上一點。

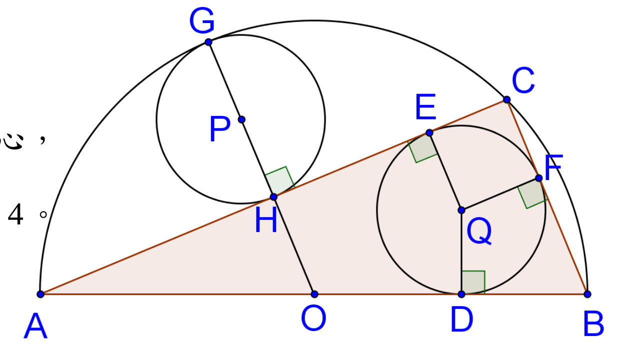


在弓形 AC 內作一最大內切圓（圓心為 P），
再作△ABC 的內切圓（圓心為 Q）。
如果這兩個圓的半徑都是 4，

試求 $\overline{AB}$ 的長度。

答：26

解：



如右圖，假設 D、E、F、G、H 為兩小圓與三角形各邊以及半圓的切點、O 為半圓圓心，

於是 $\overline{PG}=\overline{PH}=\overline{QD}=\overline{QE}=\overline{QF}=\overline{CE}=\overline{CF}=4$。

因為 $\overline{AC}$ 與圓 P 相切於點 H，

所以連心線 $\overline{OP}\perp\overline{AC}\Rightarrow\overline{OH}\perp\overline{BC}$，

又 O 為 $\overline{AB}$ 中點，所以 H 為 $\overline{AC}$ 中點 $\Rightarrow\overline{BC}=2\overline{OH}$。

假設 $\overline{AE}=x$、$\overline{BF}=y$，則 $\overline{AD}=\overline{AE}=x$、$\overline{BD}=\overline{BF}=y$，

於是 $\overline{OG}=\overline{OA}=\overline{OB}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}(x+y)\Rightarrow\overline{OH}=\dfrac{1}{2}(x+y)-8$。

又 $\overline{CA}=\overline{CE}+\overline{EA}=4+x$、$\overline{CB}=\overline{CF}+\overline{FB}=4+y$，

所以 $4+y=\overline{CB}=2\overline{OH}=2\times\left[\dfrac{1}{2}(x+y)-8\right]=(x+y)-16\Rightarrow x=20$，

且 $\overline{CA}^2+\overline{CB}^2=\overline{AB}^2\Rightarrow(4+x)^2+(4+y)^2=(x+y)^2$

$\Rightarrow 24^2+(4+y)^2=(20+y)^2\Rightarrow y=6$。

故 $\overline{AB}=x+y=20+6=26$。

4-3 假設 n 為 1000 以上的正整數。如果把 n 的最後三位數字刪掉，所得的新正整數恰好是 n 的立方根，試求正整數 n。

答：32768

解：

假設 $n = 1000m + k$ ，其中 k 就是 n 的末三位數且 $m \in \mathbb{N}$ 。

根據題目所述，m 就是 n 的立方根，即 $n = m^3$ 。

於是 $m^3 = n = 1000m + k \Rightarrow k = m^3 - 1000m = m(m^2 - 1000)$ 。

$k \geq 0 \Rightarrow m(m^2 - 1000) \geq 0 \Rightarrow m^2 \geq 1000 > 961 = 31^2 \Rightarrow m > 31$ 。

又，若 $m \geq 33$ ，

則 $k = m(m^2 - 1000) \geq 33 \times (1089 - 1000) \geq 33 \times 89 > 999$ ，矛盾，故 $m < 33$ 。

於是 $31 < m < 33 \Rightarrow m = 32$ ， $k = m(m^2 - 1000) = 32 \times (1024 - 1000) = 32 \times 24 = 768$ 。

所以 $n = 1000m + k = 32768$ 。

4-4 遞迴數列$\langle a_n\rangle$的定義為：$\begin{cases} a_1=\dfrac{3}{2} \\ a_{n+1}=\sqrt{a_n{}^2-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}},\text{其中}n\in\mathbb{N}\end{cases}$，試求出

$\sum\limits_{k=1}^{2014}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{2014}$的值。

答：$2014\dfrac{2014}{2015}$

解：

由遞迴關係可得$a_2=\dfrac{7}{6}$、$a_3=\dfrac{13}{12}$、$a_4=\dfrac{21}{20}$，於是可猜測$a_n=1+\dfrac{1}{n(n+1)}$。

以下利用數學歸納法證明$a_n=1+\dfrac{1}{n(n+1)}$，$\forall n\in\mathbb{N}$：

1° 當$n=1$時，$a_1=\dfrac{3}{2}=1+\dfrac{1}{1\times 2}$，命題成立。

2° 設$n=k$時，命題成立，即$a_k=1+\dfrac{1}{k(k+1)}$。

則$n=k+1$時，

$$a_{k+1}=\sqrt{a_k{}^2-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+2)^2}}$$

$$=\sqrt{(1+\frac{1}{k(k+1)})^2-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+2)^2}}$$

$$=\sqrt{1+\frac{2}{k(k+1)}+\frac{1}{k^2(k+1)^2}-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+2)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{k^2(k^2+3k+3)^2}{k^2(k+1)^2(k+2)^2}}=\frac{k^2+3k+3}{(k+1)(k+2)}=1+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$，命題亦成立。

故由數學歸納法原理可知$a_n=1+\dfrac{1}{n(n+1)}$，$\forall n\in\mathbb{N}$。

於是 $\sum\limits_{k=1}^{2014}a_k=\sum\limits_{k=1}^{2014}[1+\dfrac{1}{k(k+1)}]=\sum\limits_{k=1}^{2014}1+\sum\limits_{k=1}^{2014}(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1})$

$$=2014+[(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots\cdots+(\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015})]$$

$$=2014+(\frac{1}{1}-\frac{1}{2015})=2014\frac{2014}{2015}$$。

4-5 已知聯立方程式$\begin{cases} x^3-5xy^2=21 \\ y^3-5x^2y=28 \end{cases}$恰好有三組不同的實數解

$(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2),(\alpha_3,\beta_3)$，試求$(4+\frac{\alpha_1}{\beta_1})(4+\frac{\alpha_2}{\beta_2})(4+\frac{\alpha_3}{\beta_3})$之值。

答：$-\frac{61}{4}$

解：

顯然$y\neq 0$。

因為$\frac{x^3-5xy^2}{y^3-5x^2y}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}$，

將左式的分子、分母同除以y^3可得$\frac{(\frac{x}{y})^3-5(\frac{x}{y})}{1-5(\frac{x}{y})^2}=\frac{3}{4}$。

令$t=\frac{x}{y}$，則方程式$\frac{t^3-5t}{1-5t^2}=\frac{3}{4}\Rightarrow 4t^3+15t^2-20t-3=0$的實數解$t=\frac{\alpha_1}{\beta_1},\frac{\alpha_2}{\beta_2},\frac{\alpha_3}{\beta_3}$。

於是可對多項式$4t^3+15t^2-20t-3$因式分解：

$$4t^3+15t^2-20t-3=4(t-\frac{\alpha_1}{\beta_1})(t-\frac{\alpha_2}{\beta_2})(t-\frac{\alpha_3}{\beta_3})\text{。}$$

於上式中以$t=-4$代入可得$-256+240+80-3=4(-4-\frac{\alpha_1}{\beta_1})(-4-\frac{\alpha_2}{\beta_2})(-4-\frac{\alpha_3}{\beta_3})$

$$\Rightarrow 61=-4(4+\frac{\alpha_1}{\beta_1})(4+\frac{\alpha_2}{\beta_2})(4+\frac{\alpha_3}{\beta_3})$$

$$\Rightarrow (4+\frac{\alpha_1}{\beta_1})(4+\frac{\alpha_2}{\beta_2})(4+\frac{\alpha_3}{\beta_3})=-\frac{61}{4}\text{。}$$

4-6. 已知x是實數。若x^2+x與x^3都是有理數，請證明：x一定也是有理數。

解：

因為$x^2+x\in\mathbb{Q}$，所以$(x^2+x)^2=x^4+2x^3+x^2\in\mathbb{Q}$。

又因為$x^3\in\mathbb{Q}$，所以$(x^4+2x^3+x^2)-2x^3-(x^2+x)=x^4-x=x(x^3-1)\in\mathbb{Q}$。

Case 1. 若$x^3\neq 1$，則$x^3-1\in\mathbb{Q}$，所以$\frac{x(x^3-1)}{x^3-1}=x\in\mathbb{Q}$。

Case 2. 若$x^3=1$，則$x=1\in\mathbb{Q}$。

故不論哪種狀況，x一定也是有理數。