

# 北一女中 103 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

## 第三期題目：

2015 年 01 月 09 日下午 1 點鐘截止

3-1 請證明：

不存在整數  $a, b, c$  使得  $a^2bc+2$ 、 $ab^2c+2$ 、 $abc^2+2$  都是完全平方數。

3-2 假設實數  $a, b, c, d$  滿足  $b-d \geq 7$ ，

且  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  是方程式  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  的四個實根，

則  $(\alpha_1^2 + 1)(\alpha_2^2 + 1)(\alpha_3^2 + 1)(\alpha_4^2 + 1)$  的最小值為何？

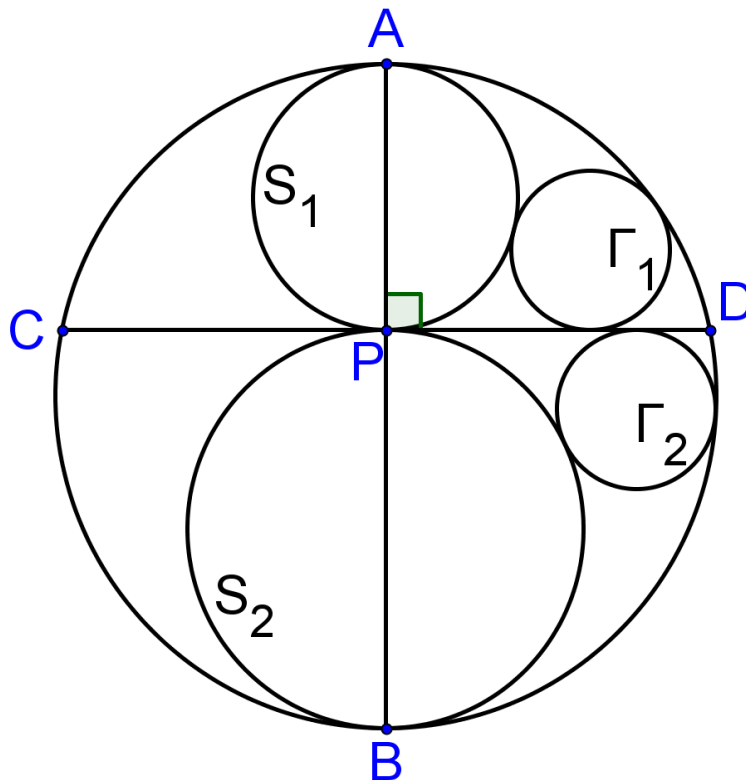
3-3 如下圖， $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$  為大圓互相垂直於  $P$  點的兩弦，且  $\overline{AB}$  為大圓直徑。

分別以  $\overline{PA}$ 、 $\overline{PB}$  為直徑作圓  $S_1$ 、 $S_2$ 。

接著作一圓  $\Gamma_1$  與大圓內切、與  $S_1$  外切、與  $\overline{CD}$  相切；

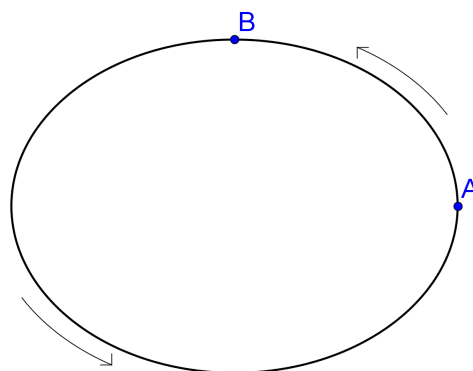
再作一圓  $\Gamma_2$  與大圓內切、與  $S_2$  外切、與  $\overline{CD}$  相切。

請證明： $\Gamma_1$  與  $\Gamma_2$  的半徑長相等。



3-4 電玩遊戲【綠園大冒險】中，主角小綠必須跑完操場一圈才能過關。但是主角的體力值需要靠一些巧克力才得以補充，如果體力值耗盡，遊戲就失敗。神秘小天使——數學老師在操場跑道上設置了若干個巧克力補給站，但是所有巧克力的總量只能讓小綠剛好跑完操場一圈。假設小綠一開始的體力值是 0，但他可以任選其中一個補給站為起點。請證明：如果小綠選取適當的起點，一定可以過關而不會在中途因為體力值耗盡而倒下。

(例如：如果只有 2 個補給站，如右圖，其中 A 補給站的巧克力可以讓小綠跑 0.9 圈、B 補給站的巧克力可以讓小綠跑 0.1 圈，那麼小綠選擇 A 補給站當起點，就可以跑完整圈操場而過關。)



3-5 請找出方程組 
$$\begin{cases} (x_3 + x_4 + x_5)^5 = 3x_1 \\ (x_4 + x_5 + x_1)^5 = 3x_2 \\ (x_5 + x_1 + x_2)^5 = 3x_3 \\ (x_1 + x_2 + x_3)^5 = 3x_4 \\ (x_2 + x_3 + x_4)^5 = 3x_5 \end{cases}$$
 的所有實數解。

3-6 如下圖，設  $P, Q$  兩點落在銳角三角形  $ABC$  的邊  $\overline{BC}$  上，

且滿足  $\angle PAB = \angle BCA$  以及  $\angle CAQ = \angle ABC$ 。

而  $M, N$  兩點分別落在直線  $AP$  與  $AQ$  上，

使得  $P$  為  $\overline{AM}$  的中點、 $Q$  為  $\overline{AN}$  的中點。

請證明：直線  $BM$  與直線  $CN$  的交點  $S$  落在  $\triangle ABC$  的外接圓上。

