北一女中 103 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

第三期解答：

3-1　請證明：

不存在整數 a,b,c 使得 a^2bc+2 、 ab^2c+2 、 abc^2+2 都是完全平方數。

解：

定義符號：若整數 i,j 除以 n 所得的餘數相等，則記為 $i \equiv j \pmod{n}$ 。

引理：若 n 為整數，則完全平方數 $n^2 \equiv 0$ 或 $1 \pmod{4}$ 。

引理證明：

若 n 為偶數，令 $n=2k$ （ $k \in \mathbb{Z}$ ），則 $n^2=4k^2$ ，此時 $n^2 \equiv 0 \pmod{4}$ 。

若 n 為奇數，令 $n=2k+1$ （ $k \in \mathbb{Z}$ ），則 $n^2=4(k^2+k)+1$ ，此時 $n^2 \equiv 1 \pmod{4}$ 。

假設整數 a,b,c 使得 a^2bc+2 、 ab^2c+2 、 abc^2+2 都是完全平方數。

若 a 為偶數，則 a^2 為 4 的倍數，故 $a^2bc+2 \equiv 2 \pmod{4}$ ，

此時 a^2bc+2 一定不是完全平方數，矛盾，故 a 必為奇數。

同理亦可證明 b,c 也一定是奇數，

所以 a^2bc+2 、 ab^2c+2 、 abc^2+2 都是奇完全平方數。

故 $a^2bc+2 \equiv ab^2c+2 \equiv abc^2+2 \equiv 1 \pmod{4}$

$\Rightarrow a^2bc \equiv ab^2c \equiv abc^2 \equiv 3 \pmod{4}$

$\Rightarrow a^2bc \times ab^2c \times abc^2 \equiv 3\times3\times3 \equiv 3 \pmod{4}$

$\Rightarrow a^4b^4c^4 \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow (a^2b^2c^2)^2 \equiv 3 \pmod{4}$ ，這與引理矛盾。

故 a^2bc+2 、 ab^2c+2 、 abc^2+2 不可能都是完全平方數。

3-2 假設實數 a,b,c,d 滿足 $b-d\ge 7$ ，

且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是方程式 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的四個實根，

則 $(\alpha_1{}^2+1)(\alpha_2{}^2+1)(\alpha_3{}^2+1)(\alpha_4{}^2+1)$ 的最小值為何？

答：36

解：

因為 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是方程式 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的四個實根，

所以 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$ 。

因為 $(\alpha_k{}^2+1)=(\alpha_k+i)(\alpha_k-i)$ ，

所以 $(\alpha_1{}^2+1)(\alpha_2{}^2+1)(\alpha_3{}^2+1)(\alpha_4{}^2+1)$

$$
\begin{aligned}
&=[(\alpha_1+i)(\alpha_1-i)][(\alpha_2+i)(\alpha_2-i)][(\alpha_3+i)(\alpha_3-i)][(\alpha_4+i)(\alpha_4-i)]\\
&=[(\alpha_1+i)(\alpha_2+i)(\alpha_3+i)(\alpha_4+i)][(\alpha_1-i)(\alpha_2-i)(\alpha_3-i)(\alpha_4-i)]\\
&=[(-i-\alpha_1)(-i-\alpha_2)(-i-\alpha_3)(-i-\alpha_4)][(i-\alpha_1)(i-\alpha_2)(i-\alpha_3)(i-\alpha_4)]\\
&=f(-i)f(i)\\
&=(1+ai-b-ci+d)(1-ai-b+ci+d)\\
&=(1-b+d)^2-(ai-ci)^2\\
&=(b-d+1)^2+(a-c)^2\ge(7-1)^2+0=36
\end{aligned}
$$
。

且當 $b-d=7$ 、 $a=c$ 時，等號會成立。

例如，取 $a=c=5,b=8,d=1$ ，

則方程式 $f(x)=x^4+5x^3+8x^2+5x+1=(x^2+3x+1)(x^2+2x+1)=0$

的四根為 $-1,-1,\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 全為實數，

此時題目中的 $(\alpha_1{}^2+1)(\alpha_2{}^2+1)(\alpha_3{}^2+1)(\alpha_4{}^2+1)$ 就會達到最小值 36。

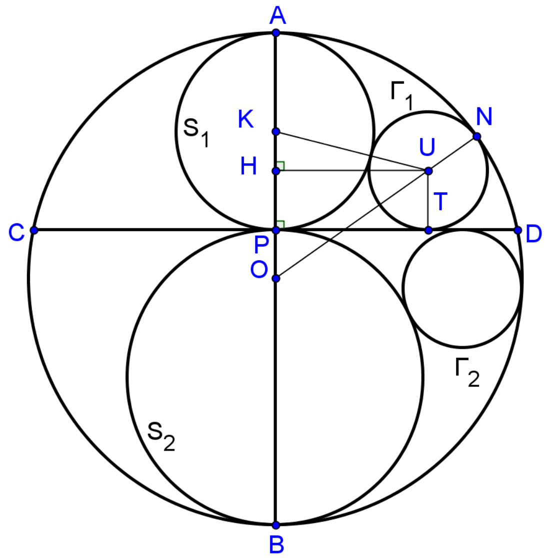
3-3 如下圖，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為大圓互相垂直於 P 點的兩弦，且$\overline{AB}$為大圓直徑。

分別以$\overline{PA}$、$\overline{PB}$為直徑作圓 S_1、S_2。

接著作一圓Γ_1與大圓內切、與S_1外切、與$\overline{CD}$相切；

再作一圓Γ_2與大圓內切、與S_2外切、與$\overline{CD}$相切。

請證明：Γ_1與Γ_2的半徑長相等。



解：

如圖，令大圓,S_1,Γ_1的圓心分別為O,K,U、半徑分別為R,r,x；

假設Γ_1與大圓切於 N、且分別與$\overline{CD}$切於 T，再作 U 對$\overline{OA}$的投影點 H。

因為$\overline{PT}$是外切的兩圓S_1,Γ_1的外公切線段，且S_1,Γ_1的半徑分別為r,x，

所以$\overline{PT_1}=\sqrt{(r+x)^2-(r-x)^2}=\sqrt{4rx}$，故$\overline{UH}=\overline{PT}=\sqrt{4rx}$。

又，$\overline{OK}=R-r$、$\overline{KH}=r-x$，所以$\overline{OH}=R-2r+x$，

而$\overline{OU}=\overline{ON}-\overline{UN}=R-x$，

所以由畢氏定理可得$(\sqrt{4rx})^2+(R-2r+x)^2=(R-x)^2 \Rightarrow x=\dfrac{r(R-r)}{R}$。

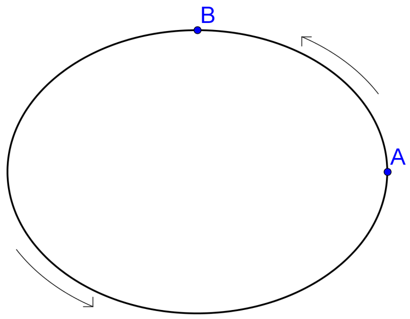
另一方面，令Γ_2的半徑為y。

易知S_2的半徑$R-r$，所以同上述方法可得$y=\dfrac{(R-r)r}{R}=x$，

故Γ_1與Γ_2的半徑長相等。

3-4 電玩遊戲【綠園大冒險】中，主角小綠必須跑完操場一圈才能過關。但是主角的體力值需要靠一些巧克力才得以補充，如果體力值耗盡，遊戲就失敗。神秘小天使——數學老師在操場跑道上設置了若干個巧克力補給站，但是所有巧克力的總量只能讓小綠剛好跑完操場一圈。假設小綠一開始的體力值是 0，但他可以任選其中一個補給站為起點。請證明：如果小綠選取適當的起點，一定可以過關而不會在中途因為體力值耗盡而倒下。

（例如：如果只有 2 個補給站，如右圖，
其中 A 補給站的巧克力可以讓小綠跑 0.9 圈、
B 補給站的巧克力可以讓小綠跑 0.1 圈，
那麼小綠選擇 A 補給站當起點，
就可以跑完整圈操場而過關。）



解：

假設補給站有 n 個，依序為 $S_1,S_2,\cdots\cdots,S_n$，不妨定義 $S_{n+k}=S_k$。

令 S_k,S_{k+1} 距離 d_k 圈操場，則 $d_1+d_2+\cdots\cdots+d_n=1$。

再設 S_k 中的巧克力可讓小綠補充跑 c_k 圈操場的體力值，$c_1+c_2+\cdots\cdots+c_n=1$。

定義 $a_k=c_k-d_k$，且 $\sigma(m)=\sum_{k=1}^{m}a_k=a_1+a_2+\cdots+a_m$，

則 $\sigma(n)=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}c_k-\sum_{k=1}^{n}d_k=1-1=0$。

考慮 $\sigma(1),\sigma(2),\cdots\cdots,\sigma(n-1)$ 這 $n-1$ 個數，

假設 $\sigma(j)$ 是其中最小的（如果最小值不只一個，則任取一個）。

小綠從補給站 S_{j+1} 出發後，如果在補給站 S_i 前因為體力值耗盡而倒下：

Case 1. 若 $j+1<i\le n$。

那就表示 $\sum_{k=j+1}^{i-1}c_k<\sum_{k=j+1}^{i-1}d_k\Rightarrow\sum_{k=j+1}^{i-1}a_k<0\Rightarrow\sigma(i-1)-\sigma(j)<0\Rightarrow\sigma(i-1)<\sigma(j)$，

此與 $\sigma(j)$ 的最小性矛盾。

Case 2. 若 $1\le i\le j$。

那就表示 $\sum_{k=j+1}^{n}c_k+\sum_{k=1}^{i-1}c_k<\sum_{k=j+1}^{n}d_k+\sum_{k=1}^{i-1}d_k\Rightarrow\sum_{k=j+1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{i-1}a_k<0$

$\Rightarrow\sigma(n)-\sigma(j)+\sigma(i-1)<0\Rightarrow\sigma(i-1)<\sigma(j)$，此與 $\sigma(j)$ 的最小性矛盾。

所以小綠從補給站 S_{j+1} 出發後，

不會在任一個補給站 S_i 前因為體力值耗盡而倒下，進而一定可以過關，證畢。

3-5 請找出方程組$\begin{cases}(x_3+x_4+x_5)^5=3x_1\\(x_4+x_5+x_1)^5=3x_2\\(x_5+x_1+x_2)^5=3x_3\\(x_1+x_2+x_3)^5=3x_4\\(x_2+x_3+x_4)^5=3x_5\end{cases}$的所有實數解。

解：

若x_1,x_2,x_3,x_4,x_5不全相等，不妨假設$x_1\neq x_2$。

Case 1.　假設$x_1>x_2$。

則$(x_3+x_4+x_5)^5=3x_1>3x_2=(x_4+x_5+x_1)^5\Rightarrow x_3+x_4+x_5>x_4+x_5+x_1\Rightarrow x_3>x_1$

$\Rightarrow (x_5+x_1+x_2)^5=3x_3>3x_1=(x_3+x_4+x_5)^5$

$\Rightarrow x_5+x_1+x_2>x_3+x_4+x_5\Rightarrow x_2-x_4>x_3-x_1>0\Rightarrow x_2>x_4$

$\Rightarrow (x_4+x_5+x_1)^5=3x_2>3x_4=(x_1+x_2+x_3)^5$

$\Rightarrow x_4+x_5+x_1>x_1+x_2+x_3\Rightarrow x_5-x_3>x_2-x_4>0\Rightarrow x_5>x_3$

$\Rightarrow x_5>x_3>x_1>x_2>x_4\Rightarrow (x_2+x_3+x_4)^5=3x_5>3x_4=(x_1+x_2+x_3)^5$

$\Rightarrow x_2+x_3+x_4>x_1+x_2+x_3\Rightarrow x_4>x_1$，矛盾。

Case 2.　假設$x_1<x_2$。

則$(x_3+x_4+x_5)^5=3x_1<3x_2=(x_4+x_5+x_1)^5\Rightarrow x_3+x_4+x_5<x_4+x_5+x_1\Rightarrow x_3<x_1$

$\Rightarrow (x_5+x_1+x_2)^5=3x_3<3x_1=(x_3+x_4+x_5)^5$

$\Rightarrow x_5+x_1+x_2<x_3+x_4+x_5\Rightarrow x_2-x_4<x_3-x_1<0\Rightarrow x_2<x_4$

$\Rightarrow (x_4+x_5+x_1)^5=3x_2<3x_4=(x_1+x_2+x_3)^5$

$\Rightarrow x_4+x_5+x_1<x_1+x_2+x_3\Rightarrow x_5-x_3<x_2-x_4<0\Rightarrow x_5<x_3$

$\Rightarrow x_5<x_3<x_1<x_2<x_4\Rightarrow (x_2+x_3+x_4)^5=3x_5<3x_4=(x_1+x_2+x_3)^5$

$\Rightarrow x_2+x_3+x_4<x_1+x_2+x_3\Rightarrow x_4<x_1$，矛盾。

綜合以上可知x_1,x_2,x_3,x_4,x_5必全相等，假設$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=\alpha$，

則$(3\alpha)^5=3\alpha\Rightarrow\alpha=0$或$\alpha^4=\dfrac{1}{81}$，此時$\alpha=0$或$\pm\dfrac{1}{3}$，

故$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(0,0,0,0,0)$或$(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})$或$(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3})$。

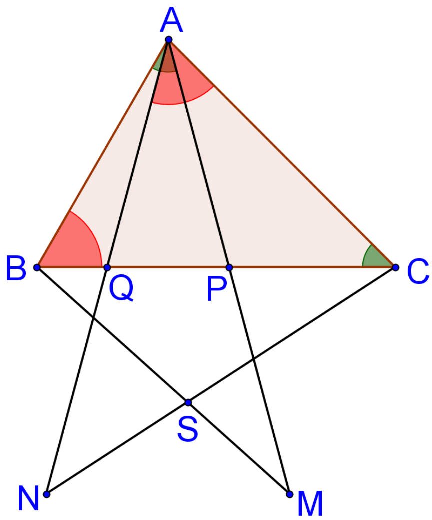
3-6 如下圖，設 P,Q 兩點落在銳角三角形 ABC 的邊 $\overline{BC}$ 上，

且滿足 $\angle PAB=\angle BCA$ 以及 $\angle CAQ=\angle ABC$ 。

而 M,N 兩點分別落在直線 AP 與 AQ 上，

使得 P 為 $\overline{AM}$ 的中點、Q 為 $\overline{AN}$ 的中點。

請證明：直線 BM 與直線 CN 的交點 S 落在$\triangle ABC$ 的外接圓上。



解：

因為 $\angle PAB=\angle BCA$ 以及 $\angle CAQ=\angle ABC$ ，所以$\triangle ABP\sim\triangle CAQ$，

於是 $\overline{AP}:\overline{BP}=\overline{CQ}:\overline{AQ}\Rightarrow\overline{PM}:\overline{BP}=\overline{CQ}:\overline{QN}$ 。

又因為 $\angle BPM=\angle PAB+\angle ABC=\angle BCA+\angle CAQ=\angle CQN$ ，

所以$\triangle BPM\sim\triangle NQC\Rightarrow\angle CBS=\angle CNQ$ 。

於是

$$\begin{aligned}\angle ABS+\angle ACS&=(\angle ABC+\angle CBS)+(\angle ACB+\angle BCS)\\&=(\angle QAC+\angle CNQ)+(\angle ACB+\angle BCS)\\&=(\angle QAC+\angle ACB)+(\angle CNQ+\angle BCS)\\&=(\angle QAC+\angle ACB)+\angle CQA=180^\circ\end{aligned}$$

，

故 A,B,S,C 四點共圓，即 S 落在$\triangle ABC$ 的外接圓上，證畢。

【註】此題為 2014 年國際數學奧林匹亞競賽（IMO）第 4 道題。