北一女中 103 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

第二期解答：

2-1 (1) 請證明：$1,2,3,\cdots\cdots,10$ 可以兩兩配成一對，使得每一對的和都是質數，且這 5 個質數都相異。

(2) 請證明：$1,2,3,\cdots\cdots,20$ 不可能兩兩配成一對，使得每一對的和都是質數，且這 10 個質數都相異。

解：

(1)

$1,2,3,\cdots\cdots,10$ 取 2 數之和最大為 19。

先列出最小的奇質數至 19：$3,5,7,11,13,17,19$，此 7 數之和為 75。

而$1+2+\cdots\cdots+10=55$，所以若要滿足題目所述，則題目中的 5 個質數，必定是從$3,5,7,11,13,17,19$之中，剔除 2 個和為 20 的質數，於是 5 必定是被留著的。

若 3 也被留著，則配對必有$(1,2)$，則沒有配對可以使其和為 5，矛盾。

故 3 一定是被剔除的，於是 17 也是被剔除的，留下的是$5,7,11,13,19$。

19 一定是由配對$(9,10)$而得。

若 5 是由$(1,4)$配對而得，則可推得$7,11,13$分別由$(2,5),(3,8),(6,7)$配對而得。

若 5 是由$(2,3)$配對而得，則可推得$7,11,13$分別由$(1,6),(4,7),(5,8)$配對而得。

於是滿足題目所述的配對方式有 2 種：

$(1,4),(2,5),(3,8),(6,7),(9,10)$ 或 $(2,3),(1,6),(4,7),(5,8),(9,10)$，

這 2 種方式配成的質數都是$5,7,11,13,19$。

(2)

$1,2,3,\cdots\cdots,20$ 取 2 數之和最大為 39。

先列出最小的奇質數至 39：$3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37$，此 11 數之和為 195。

而$1+2+\cdots\cdots+20=210>195$，所以題目所述之配對方式不存在。

2-2 黑板上有$1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots\cdots,\dfrac{1}{2014}$共 2014 個數。小綠用板擦將黑板上其中任意兩數 x_1與y_1擦去，再於黑板上添寫$x_1y_1+x_1+y_1$；接著又用板擦將黑板上其中任意兩數x_2與y_2擦去，再於黑板上添寫$x_2y_2+x_2+y_2$；以此類推，小綠持續此過程直到黑板上只剩下一個數 S，試求 S 所有的可能值。

解：

如果黑板上有 n 個數$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$，定義$P=(a_1+1)(a_2+1)\cdots\cdots(a_n+1)$。

若小綠將黑板上的a_i與a_j擦掉，則他會在黑板上添寫$a_ia_j+a_i+a_j$，

則此時的 P 值會比原來的少乘了$(a_i+1)(a_j+1)$，又會多乘了$(a_ia_j+a_i+a_j)+1$，

所以新的 P 值為$(a_1+1)(a_2+1)\cdots\cdots(a_n+1)\times\dfrac{1}{(a_i+1)(a_j+1)}\times[(a_ia_j+a_i+a_j)+1]$

$$=(a_1+1)(a_2+1)\cdots\cdots(a_n+1)\times\frac{1}{(a_i+1)(a_j+1)}\times[(a_i+1)(a_j+1)]$$

$$=(a_1+1)(a_2+1)\cdots\cdots(a_n+1)\text{，}$$

這表示小綠不論選擇的順序是什麼，P 值都不會改變。

【註：這在數學上的專用術語稱為「不變量」。】

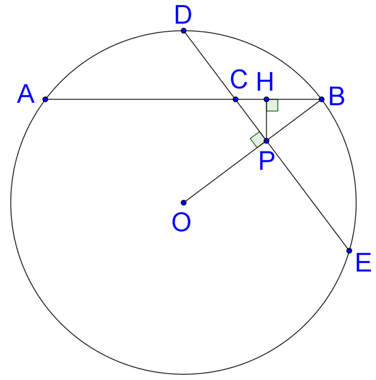
於是一開始的 P 值為$(1+1)(\dfrac{1}{2}+1)(\dfrac{1}{3}+1)\cdots\cdots(\dfrac{1}{2014}+1)$

$$=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\cdots\times\frac{2015}{2014}=2015\text{，}$$

而黑板剩下一個數 S 時，P 值是$S+1$，

這和一開始的 P 值 2015 會相同，故 S 只能是 2014。

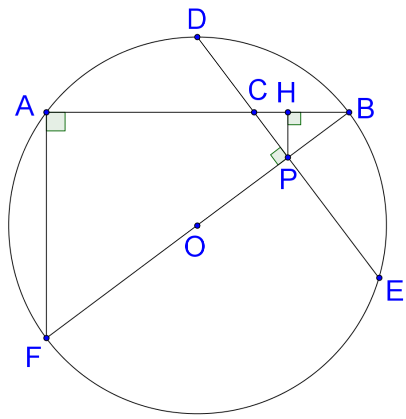
2-3 平面上一圓 Γ 的圓心為 O，且 $\overline{AB}$ 為不通過 O 點的一弦。在 $\overline{OB}$ 上任取一點 P，過 P 點作 $\overline{OB}$ 的垂線 L，令 L 與 $\overline{AB}$ 的交點為 C、且 L 與圓 Γ 的交點為 D 與 E。再過 P 對 $\overline{AB}$ 作垂線，垂足為 H。



請證明：$\overline{PD}\cdot\overline{PE}=\overline{AH}\cdot\overline{BC}$。

解：

延長 $\overleftrightarrow{BO}$ 交圓 O 於點 F，連接 $\overline{AF}$。



根據圓內冪定理可知 $\overline{PD}\cdot\overline{PE}=\overline{PB}\cdot\overline{PF}$。

又，$\overline{PB}\cdot\overline{PF}=\overline{PB}\cdot(\overline{BF}-\overline{BP})=\overline{PB}\cdot\overline{BF}-\overline{PB}^2$，

於是可分別考慮 $\overline{PB}\cdot\overline{BF}$ 與 $\overline{PB}^2$。

因為 $\overline{BF}$ 為圓 O 的直徑，

所以 $\angle BPC=\angle BAF=90°$，

故 $\triangle BPC \sim \triangle BAF \Rightarrow \dfrac{\overline{BP}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BF}}$

$\Rightarrow \overline{PB}\cdot\overline{BF}=\overline{AB}\cdot\overline{BC}$。

又因為 $\angle BPC=90°$ 且 $\overline{PH}\perp\overline{BC}$，所以 $\overline{PB}^2=\overline{BH}\cdot\overline{BC}$。

於是 $\overline{PB}\cdot\overline{PF}=\overline{PB}\cdot\overline{BF}-\overline{PB}^2=\overline{AB}\cdot\overline{BC}-\overline{BH}\cdot\overline{BC}=(\overline{AB}-\overline{BH})\cdot\overline{BC}=\overline{AH}\cdot\overline{BC}$，

故 $\overline{PD}\cdot\overline{PE}=\overline{PB}\cdot\overline{PF}=\overline{AH}\cdot\overline{BC}$，證畢。

2-4 試找出所有的正整數組(a,b,c)，使得$\begin{cases} a=\gcd(b^2+1,c^2+1) \\ b=\gcd(c^2+1,a^2+1) \\ c=\gcd(a^2+1,b^2+1) \end{cases}$，其中$\gcd(x,y)$表示$x,y$的最大公因數。

答：$(a,b,c)=(2,1,1)$ 或 $(1,2,1)$ 或 $(1,1,2)$

解：

不妨先假設$a\ge b\ge c$。

令$d=\gcd(a,b)$，則$d\,|\,a\Rightarrow d\,|\,b^2+1$。又因為$d\,|\,b\Rightarrow d\,|1\Rightarrow d=1$。

於是可假設$c^2+1=kab$，其中$k\in\mathbb{N}$。$c^2+1=kab\ge k\cdot c\cdot c=kc^2$。

若$k\ge 3$：　$c^2+1\ge 3c^2\Rightarrow 1\ge 2c^2$，矛盾。

若$k=2$：　$c^2+1\ge 2c^2\Rightarrow c^2\le 1\Rightarrow c=1$

於是$2ab=kab=c^2+1=2\Rightarrow a=b=1$，

此與$a=\gcd(b^2+1,c^2+1)$矛盾。

若$k=1$：　則$c^2+1=ab\ge ac$。

若$a=c$，則$b=c$，於是$c^2+1=c^2$，矛盾。

若$a\ge c+1$，則$c^2+1\ge ac\ge (c+1)\cdot c\Rightarrow c\le 1\Rightarrow c=1$。

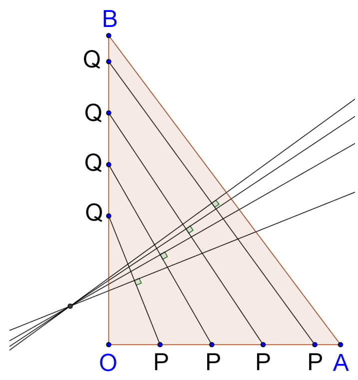
$ab=kab=c^2+1=2\Rightarrow a=2$ 且 $b=1$。

將$(a,b,c)=(2,1,1)$代入$\begin{cases} a=\gcd(b^2+1,c^2+1) \\ b=\gcd(c^2+1,a^2+1) \\ c=\gcd(a^2+1,b^2+1) \end{cases}$檢驗可知符合條件。

再由對稱性可知$(a,b,c)=(2,1,1)$ 或 $(1,2,1)$ 或 $(1,1,2)$。

2-5　$\triangle AOB$ 為直角三角形，其中 $\angle AOB = 90°$。

已知 P、Q 分別為 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 上的動點，且滿足 $\overline{AP} = \overline{BQ}$。請證明：無論 P、Q 如何變動，$\overline{PQ}$ 的中垂線都會通過某個固定的點。

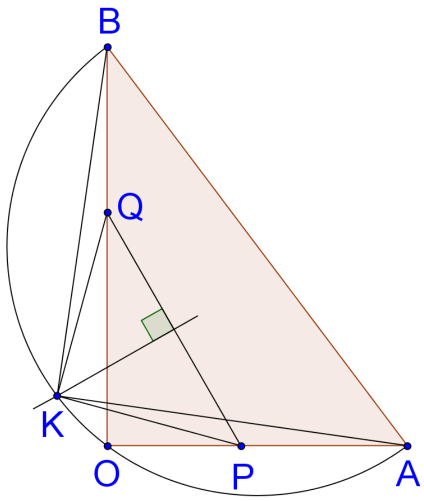


解：

因為 $\angle AOB = 90°$，

所以可以 $\overline{AB}$ 為直徑作半圓 AOB。

取 $\overset{\frown}{AOB}$ 的中點 K，連接 $\overline{KA}, \overline{KB}, \overline{KP}, \overline{KQ}$。



因為 K 是 $\overset{\frown}{AOB}$ 的中點，所以 $\overline{KA} = \overline{KB}$，

又 $\overline{AP} = \overline{BQ}$ 且 $\angle KAP = \frac{1}{2}\overset{\frown}{KO} = \angle KBQ$，

所以 $\triangle KAP \cong \triangle KBQ \Rightarrow \overline{KP} = \overline{KQ}$，

故 K 一定在 $\overline{PQ}$ 的中垂線上。

但 K 點只與 $\triangle AOB$ 有關，與 P、Q 無關。

所以無論 P、Q 如何變動，$\overline{PQ}$ 的中垂線都會通過固定的點 K。

2-6 試找出所有的函數 f，其定義域與對應域皆為實數集合 $\mathbb{R}$，且滿足：

對於所有實數 x 與 y，$f(x)f(y)+f(x+y)=xy$ 都成立。

答：「$f(x)=x-1$，$\forall x\in\mathbb{R}$」與「$f(x)=-x-1$，$\forall x\in\mathbb{R}$」。

解：

$f(x)f(y)+f(x+y)=xy\cdots\cdots$（★）

在（★）中令 $x=y=0$ 可得 $[f(0)]^2+f(0)=0$，於是 $f(0)=0$ 或 -1。

Case 1：若 $f(0)=0$。

在（★）中令 $y=0$ 可得 $f(x)f(0)+f(x)=0\Rightarrow f(x)=0$，$\forall x\in\mathbb{R}$。

在（★）中令 $x=y=1$ 可得 $[f(1)]^2+f(2)=1$，此與 $f(x)=0$，$\forall x\in\mathbb{R}$ 矛盾。

Case 2：若 $f(0)=-1$。

在（★）中令 $x=1$、$y=-1$ 可得 $f(1)f(-1)+f(0)=-1\Rightarrow f(1)f(-1)=0$。

於是可知 $f(1)=0$ 或 $f(-1)=0$。

若 $f(1)=0$，在（★）中令 $x=z-1$、$y=1$ 可得

$$f(z-1)f(1)+f(z)=z-1\Rightarrow f(z)=z-1，\forall z\in\mathbb{R}。$$

若 $f(-1)=0$，在（★）中令 $x=z+1$、$y=-1$ 可得

$$f(z+1)f(-1)+f(z)=-z-1\Rightarrow f(z)=-z-1，\forall z\in\mathbb{R}。$$

檢驗：

若 $f(x)=x-1$，$\forall x\in\mathbb{R}$，

則（★）左式 $=(x-1)(y-1)+(x+y-1)=xy=$（★）右式。

若 $f(x)=-x-1$，$\forall x\in\mathbb{R}$，

則（★）左式 $=(-x-1)(-y-1)+(-x-y-1)=xy=$（★）右式。

故滿足題目條件的函數只有 2 個：

「$f(x)=x-1$，$\forall x\in\mathbb{R}$」以及「$f(x)=-x-1$，$\forall x\in\mathbb{R}$」。