北一女中 103 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

第一期解答：

1-1　試解聯立方程式$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z+x}=\dfrac{1}{4}\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{5}\end{cases}$的實數解。

答：$x=\dfrac{11}{3}$、$y=\dfrac{11}{2}$、$z=11$。

解：

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{x+y+z}{x(y+z)}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow x(y+z)=3(x+y+z)$。

同理可由第 2、3 式得 $y(z+x)=4(x+y+z)$、$z(x+y)=5(x+y+z)$。

於是 $x(y+z):y(z+x):z(x+y)=3:4:5$。

令 $x(y+z)=3k$、$y(z+x)=4k$、$z(x+y)=5k$，其中 $k\neq 0$，

將此三式相加後化簡可得 $xy+yz+zx=6k$，

再將此式與前三式相減可得 $yz=3k$、$zx=2k$、$xy=k$，

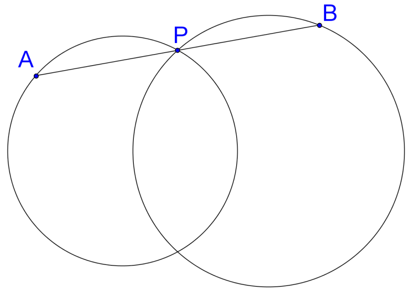
將上三式兩兩相除後可得 $\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}$、$\dfrac{y}{z}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x:y:z=2:3:6$，

令 $x=2a$、$y=3a$、$z=6a$，代回 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{1}{3}$ 可得 $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{9a}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow a=\dfrac{11}{6}$，

故 $x=\dfrac{11}{3}$、$y=\dfrac{11}{2}$、$z=11$。

1-2 平面上圓Γ_1半徑為 11、圓Γ_2半徑為 13，且兩圓圓心距離為 14。已知 P 為此兩圓的交點之一，過 P 點作一直線 L 分別與Γ_1交於點 A、與Γ_2交於點 B。

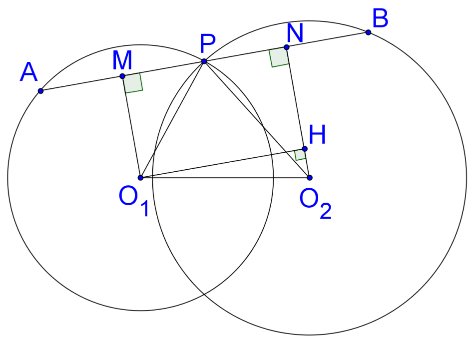
若恰好有 $\overline{PA}=\overline{PB}$，試求 $\overline{PA}$ 的長度。



答：$\sqrt{190}$。

解：

假設圓Γ_1與圓Γ_2的圓心分別為O_1與O_2。



分別取$\overline{AP}$與$\overline{PB}$的中點 M、N，

連接$\overline{O_1M}$、$\overline{O_2N}$，

則$\overline{O_1M}\perp\overline{AP}$、$\overline{O_2N}\perp\overline{PB}$。

再過O_1作$\overline{O_2N}$的垂線，令垂足為 H。

假設$\overline{AM}=\overline{MP}=\overline{PN}=\overline{NB}=x$，

則$\overline{O_1M}=\sqrt{\overline{O_1P}^2-\overline{MP}^2}=\sqrt{121-x^2}$ 且$\overline{O_2N}=\sqrt{\overline{O_2P}^2-\overline{PN}^2}=\sqrt{169-x^2}$。

又$\overline{O_1H}=\overline{MN}=2x$、$\overline{NH}=\overline{O_1M}=\sqrt{121-x^2}$，

所以$\overline{O_2H}=\overline{O_2N}-\overline{NH}=\sqrt{169-x^2}-\sqrt{121-x^2}$，

故$\overline{O_1H}^2+\overline{O_2H}^2=\overline{O_1O_2}^2 \Rightarrow (2x)^2+(\sqrt{169-x^2}-\sqrt{121-x^2})^2=196$

$\Rightarrow 4x^2+(169-x^2)+(121-x^2)-2\sqrt{(169-x^2)(121-x^2)}=196$

$\Rightarrow \sqrt{(169-x^2)(121-x^2)}=47+x^2$

$\Rightarrow (169-x^2)(121-x^2)=(47+x^2)^2$

$\Rightarrow x^4-290x^2+169\cdot121=x^4+94x^2+47^2$

$\Rightarrow 384x^2=169\cdot121-47^2=(13\cdot11)^2-47^2=(143-47)(143+47)=96\cdot190$

$\Rightarrow x^2=\dfrac{190}{4} \Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{190}}{2} \Rightarrow \overline{PA}=2x=\sqrt{190}$。

1-3 試求所有的正整數 n，使得 $n+16$ 與 $16n+1$ 都是完全平方數。

答：$n=1008$ 或 105 或 33。

解：

令 $n+16=a^2$ 、$16n+1=b^2$ ，其中 $a,b\in\mathbb{N}$

$16a^2-b^2=16(n+16)-(16n+1)=255\Rightarrow(4a-b)(4a+b)=3\times5\times17$ ，

所以 $\begin{cases}4a-b=1\\4a+b=255\end{cases}$ 或 $\begin{cases}4a-b=3\\4a+b=85\end{cases}$ 或 $\begin{cases}4a-b=5\\4a+b=51\end{cases}$ 或 $\begin{cases}4a-b=15\\4a+b=17\end{cases}$,

於是可解得 $\begin{cases}a=32\\b=127\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=11\\b=41\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=7\\b=23\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=4\\b=1\end{cases}$,

進而可得 $n=1008$ 或 105 或 33 或 0（不合）。

1-4 如果正整數 m,n（其中 $m<n$）使得 $\frac{m}{n}$ 化為小數的小數點後四位為 2014，即

$\frac{m}{n}=0.2014\cdots\cdots$，試求分母 n 的最小值。

答：134。

解：

由題目所述可知 $0.2014\le\frac{m}{n}<0.2015$ 。

$$\begin{aligned}\frac{2014}{10000}\le\frac{m}{n}<\frac{2015}{10000}\quad&\Leftrightarrow\frac{1007}{5000}\le\frac{m}{n}<\frac{403}{2000}\\&\Leftrightarrow\frac{5000}{1007}\ge\frac{n}{m}>\frac{2000}{403}\\&\Leftrightarrow5-\frac{5000}{1007}\le5-\frac{n}{m}<5-\frac{2000}{403}\\&\Leftrightarrow\frac{35}{1007}\le\frac{5m-n}{m}<\frac{15}{403}\\&\Leftrightarrow\frac{1007}{35}\ge\frac{m}{5m-n}>\frac{403}{15}\\&\Leftrightarrow28\frac{27}{35}\ge\frac{m}{5m-n}>26\frac{13}{15}\text{ 。}\end{aligned}$$

若 $5m-n=1$ ，則 $m=27$ 或 28，於是 $(m,n)=(27,134)$ 或 $(28,139)$ 。

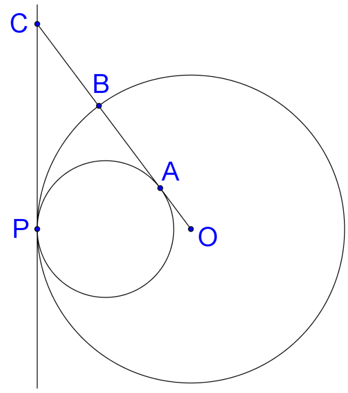
若 $5m-n\ge2$ ，則 $m\ge2\cdot26\frac{13}{15}>53$ ，

於是 $\frac{m}{n}<0.2015\Rightarrow n>\frac{m}{0.2015}>\frac{53}{0.2015}>134$ 。

綜合以上論述可知 n 的最小值為 134。

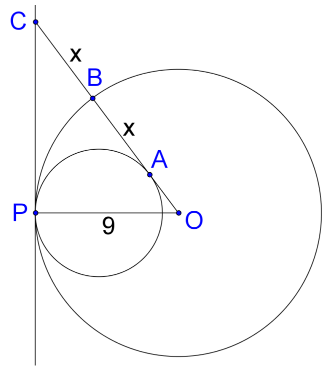
1-5 如圖，平面上一小圓 C_1 與一大圓 C_2 內切於點 P，且令其公切線為 ℓ。過 C_2 的圓心 O 作 C_1 的一條切線，設此切線與 C_1 切於點 A、與 C_2 交於點 B、與 ℓ 交於點 C，其中點 B 在 A、C 之間。

若圓 C_2 的半徑為 9 且 $\overline{AB}=\overline{BC}$，試求 $\overline{OA}$ 的長度。



答：3。
解：

連接 $\overline{OP}$，假設 $\overline{AB}=\overline{BC}=x$，則 $\overline{CP}=\overline{CA}=2x$。

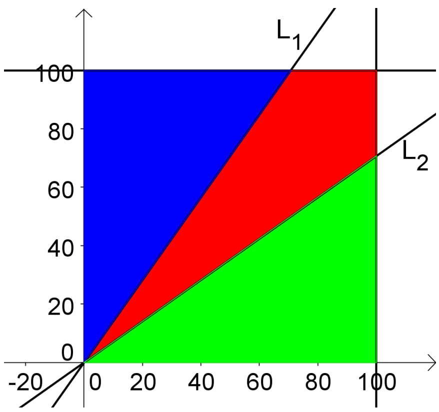


又 $\overline{OP}=\overline{OB}=9$，所以 $\overline{OC}=\overline{OB}+\overline{BC}=9+x$。

於是 $\overline{OC}^2=\overline{OP}^2+\overline{PC}^2 \Rightarrow (9+x)^2=9^2+(2x)^2 \Rightarrow x=6$。

故 $\overline{OC}=9+x=15$，$\overline{OA}=\overline{OC}-\overline{AC}=15-2x=3$。

1-6 已知 a,b 都是不超過 100（即 $a,b\le 100$）的正整數。如果小綠已經知道滿足 $a<\sqrt{2}b<2a$ 的正整數組 (a,b) 共有 2958 組，則滿足 $\sqrt{2}b<a$ 的正整數組共有幾組？
答：3521。
解：
定義「格子點」為：坐標平面上滿足 $a,b\le 100$ 且 a,b 都是正整數的點 (a,b)。
顯然「格子點」共有 10000 個。



如右圖，作兩直線 $L_1: y=\sqrt{2}x$、$L_2: y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，

則 L_1、L_2 上不會有格子點（否則 $\sqrt{2}=\dfrac{b}{a}$ 為有理數）。

若 (a,b) 滿足 $a<\sqrt{2}b<2a$，則 $b<\sqrt{2}a$ 且 $b>\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，
這就代表 (a,b) 會落在右圖中的紅色區域，
亦即紅色區域有 2958 個格子點。

同理，若 (a,b) 滿足 $\sqrt{2}b<a$，則 $0<b<\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，代表 (a,b) 落在圖中的綠色區域。
又因為綠色區域與藍色區域是對稱的，所以其中格子點的數目一定一樣多，
故「綠色區域中的格子點數目」$=\dfrac{10000-2958}{2}=3521$。