

北一女中 106 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別： 二 年 溫 班 座號： 12 號 姓名： 張育瑄

題號： 2-5

頁碼/總頁數： 5/6 (如果只有一頁，可不填)

(請不要將兩題的解答寫在同一張答案紙，一題的解答也不要寫在同一張答案紙的正反面。)

若 $p=q=2 \Rightarrow r$ 為 2 的倍數 \Rightarrow (不合)

若 p, q 皆為奇數質數 $\Rightarrow p^q, q^p$ 皆為奇數 $\Rightarrow p^q + q^p$ 為偶數 \Rightarrow (不合)

故 p, q 必為一奇一偶

\Rightarrow 假設 p 為偶數質數 2, q 為奇數質數 $\Rightarrow 2^q + q^2 = r$

① 當 $q=3 \Rightarrow 2^3 + 3^2 = 17$ (符合), $(p, q, r) = (2, 3, 17)$

② 當 $q > 3, \because q$ 不是 3 的倍數

$\therefore q$ 可記為 $(3s+1)$ or $(3t+2), (s, t \in \mathbb{N}$ 且滿足 q 為奇數質數)

2 的奇數次方除以 3, 餘數皆為 2

由 $[2^{(2k+1)} = 2 \times 2^{2k} = 2 \times 4^k = 2 \times (3+1)^k]$ 可知

$$(3s+1)^2 = 9s^2 + 3 \times 2 \times s + 1$$

$$(3t+2)^2 = 9t^2 + 2 \times 2 \times 3t + (3+1) \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} (3s+1)^2 \\ (3t+2)^2 \end{matrix}} \right\} \text{餘數皆為 } 1$$

$\Rightarrow (2^q + q^2)$ 必為 3 的倍數 (不符題意)

故 $(p, q, r) = (2, 3, 17)$ or $(3, 2, 17)$ ✖.