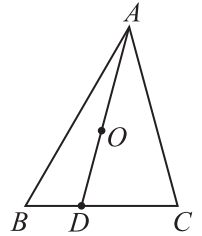


104 數甲模擬卷(8)

第壹部分：選擇題（占 78 分）

一、單選題（30 分）

1. $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， O 為其外心， D 為 \vec{AO} 與 \vec{BC} 的交點，試問下列選項何者正確？
- (1) $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = \sqrt{3} + 1 : 2 : 2\sqrt{3}$
 (2) $\triangle AOB$ 面積： $\triangle AOC$ 面積 $= \sqrt{3} : 1$ (3) $\vec{OD} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}\vec{OB} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\vec{OC}$
 (4) $\triangle AOB : \triangle BOD = \sqrt{3} : 2$ (5) $\vec{AO} \cdot \vec{AB} < \vec{AO} \cdot \vec{AC}$.



2. 某高中高三甲班共有 45 位同學，其中男同學占 20 位，女同學占 25 位，經過一次計名的調查結果發現：男同學中有一半去補數學，有一半去補英文，而在女同學中有三分之一去補數學，有三分之一去補英文，有三分之一沒有補習，今已知班上有一同學有去補數學課的情況下，請問是女同學的機率為

- (1) $\frac{4}{11}$ (2) $\frac{5}{11}$ (3) $\frac{6}{11}$ (4) $\frac{7}{11}$ (5) $\frac{8}{11}$.

3. 已知 $w = \cos \frac{2\pi}{11} + i \sin \frac{2\pi}{11}$ ，試問下列哪一個的值為最「小」？

- (1) $|1-w^2|$ (2) $|1-w^4|$ (3) $|1-w^6|$ (4) $|1-w^8|$ (5) $|1-w^{10}|$.

4. 箱子內有白球 3 個，紅球 2 個，每次取兩球，而且取後放回，若兩球同顏色可得獎品，今有 10 人輪流取球， X 表得獎人數，若 μ, σ 分別表 X 的期望值與標準差，

$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$ 為 $\frac{1944 \times a}{5^{10}}$ ，則 a 之值為 (1) 1324 (2) 3348 (3) 3589

- (4) 4096 (5) 3438.

5. 下表為常用對數表 $\log_{10} N$ 的一部分：

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

若 $10^x = 206.7$ ，請問 x 之值最接近下列哪一個選項？

- (1) 2.3070 (2) 2.3120 (3) 2.3156 (4) 2.3190 (5) 2.3200.

二、多選題 (32 分)

6. 空間中三向量 $\vec{OA}=(1, 1, 2)$, $\vec{OB}=(-1, 2, 1)$, $\vec{OC}=(3, 0, 1)$, O 為原點, 若 $\vec{OP}=\vec{OA}+m\vec{OB}+n\vec{OC}$, 其中 m, n 為任意實數, 若 O, B, C 三點所在的平面為 E , 試問下列選項何者正確? (1) P 點軌跡形成一平面 (2) 平面 E 方程式為 $x+2y-3z=0$ (3) P 點全落在與平面 E 平行的平面 F 上, 且平面 F 與平面 E 相距 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (4) $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ 三向量所張開的平行六面體體積為 6 (5) $|\vec{OP}|$ 最小值為

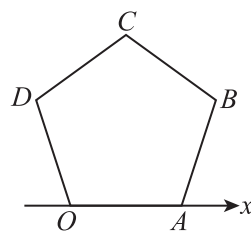
$$\frac{|(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC}|}{|\vec{OA} \times \vec{OB}|}.$$

7. 設 $f(x)=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-1, 0 \leq x \leq \pi$, 滿足 $x=\alpha$ 時有最大值 M , $x=\beta$ 時有最小值 m , 且 $f(x)$ 之最小正週期為 p , 試問下列各選項何者正確?

(1) $p=4\pi$ (2) $\alpha=\frac{\pi}{3}$ (3) $M=1$ (4) $\beta=\frac{2\pi}{3}$ (5) $m=-2$.

8. 正五邊形 $OABCD$, 其中 O 為原點, A 點在 x 軸上如右圖所示,

試問下列選項何者正確? (1) \vec{AB} 與 \vec{OC} 兩直線斜率相等, 且為此五個點中任意兩點形成的直線中最大的斜率 (2) 此 5 個點中, 任意兩點形成的不同向量共有 10 個 (3) 若 $\vec{OP}=\vec{OB}+\vec{OD}$, 則 \vec{OP} 終點 P 落在直線 \vec{CD} 上 (4) $\vec{OC} \cdot \vec{OA}=\frac{1}{2}|\vec{OA}|^2$ (5) \vec{OD} 在 \vec{OA}



上的正射影為 $(\cos\frac{2\pi}{5})\vec{OA}$.

9. 右圖為函數 $y=f(x)$ 的部分圖形, 若函數在 $x=b$ 處與 x 軸相切且 $f(d)=0$, $f''(t)=0$, 試問下列選項何者正確?

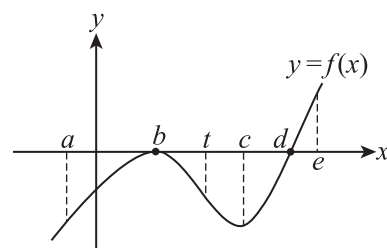
(1) $\int_a^b f(x)dx > 0$ (2) $\int_a^e f(x)dx > \int_a^d f(x)dx$

(3) 若 $x_1 \in (b, t)$, $x_2 \in (t, c) \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2) < 0$

(4) $y=f(x)$ 的圖形與直線 $x=a$, $x=c$ 及 x 軸所圍成區域

的面積為 $\int_a^c f(x)dx$ (5) 將 $y=f(x)$ 的圖形與直線 $x=a$, $x=c$ 及 x 軸所圍成區域

繞 x 軸旋轉一圈, 則所得旋轉體體積為 $\pi \int_a^c (f(x))^2 dx$.



三、選填題 (15 分)

A. 假設矩陣 $M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 經過多次的列運算後，得到另一個矩陣

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \text{ 若矩陣 } A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \text{ 則 } \det(3A) = \underline{\textcircled{10}\textcircled{11}\textcircled{12}} .$$

B. 三複數 $z_1 = -2 + i$, $z_2 = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $z_3 = \cos \phi + i \sin \phi$, 其中 $r > 0$, $\text{Arg}(z_3) = \phi$, 若 $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, 且滿足 $\frac{z_1 \times z_2}{z_3} > 0$, 則 $\phi = \underline{\frac{\textcircled{13}}{\textcircled{14}} \pi}$.

C. 空間中一個 $\triangle ABC$, 其中 $A(0,0,5)$, $B(1,2,8)$, $C(-2,4,6)$, 一個點光源在 $P(0,0,10)$, 則 $\triangle ABC$ 在 xy 平面上的影子 $\triangle A'B'C'$ 面積為_____。

第貳部分：非選擇題 (占 23 分)

一、設 k 為實數，試就 k 值討論方程式 $\log_2 |3x^3 - 18x + 4\sqrt{2}| = k$ 有幾個相異實根。(12 分)

二、已知 $f(x) = (x - \cos 0^\circ)^2 + (x - \cos 1^\circ)^2 + \dots + (x - \cos 180^\circ)^2$, 若在 $x = a$ 時 $f(x)$ 有最小值 b , 試求數對 (a, b) 之值為何? (11 分)

第壹部分：選擇題

一、單選題：1. (3) 2. (2) 3. (5) 4. (2) 5. (3)

二、多選題：6. (1)(2)(4) 7. (1)(45) 8. (1)(3)(4) 9. (2)(5)

三、選填題：A. -27 B. $\frac{3}{4}\pi$ C. 50

第貳部分：非選擇題

一、略 二、(0, 91)