數甲模擬試卷(4)

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 77 分）

一、單選題（18 分）

1. 已知 32 位整數「72721230308905569812910016823296」為正整數 x 的 12 次方，根據下表，則 $x=$？

$\sqrt[12]{a\times 10^{b}}$	$b=6$	$b=7$	$b=8$
$a=7.1$	3.72339	4.51099	5.46518
$a=7.2$	3.72773	4.51625	5.47156
$a=7.3$	3.73202	4.52144	5.47785
$a=7.4$	3.73625	4.52657	5.48407
$a=7.5$	3.74043	4.53164	5.49020

(1) 372　(2) 451　(3) 452　(4) 453　(5) 546

2. 設 z 為複數，若 $\dfrac{z-3}{z}=2(\cos 80^\circ+i\sin 80^\circ)$，則複數 $\dfrac{z}{z-1}$ 之主輻角為？

(1) 20°　(2) 40°　(3) 80°　(4) 160°　(5) 320°

3. 設甲袋中有 2 白球 3 黑球，乙袋中有 3 白球 4 黑球，今從甲袋中取 2 球放入乙袋，再從乙袋中取 2 球出來．若：

① a 為在甲袋中取出 2 白球放入乙袋之情況下，乙袋中取出 1 白球 1 黑球之機率；

② b 為在乙袋中取出 1 白球 1 黑球之情況下，發現甲袋剩下 3 黑球之機率；

③ c 為在乙袋中取出 1 白球 1 黑球之情況下，發現甲袋剩下 1 白球 2 黑球之機率．

則下列哪一個選項是正確的？

(1) $a>b>c$　(2) $b>c>a$　(3) $a>c>b$　(4) $c>a>b$　(5) $c>b>a$

二、多選題（32 分）

4. 空間坐標系中直線 L_1 ： $x-2=\dfrac{y-5}{4}=\dfrac{z}{1}$ 與直線 L_2 ： $\begin{cases} x=2-t \\ y=2+2t \\ z=3+2t \end{cases}$（$t$ 為實數）互為歪斜線，

其方向向量分別為 $\overrightarrow{L_1}$，$\overrightarrow{L_2}$，平面 E 包含 L_2 且與 L_1 平行，直線 L_1 在 E 之投影直線為 L_3，

直線 L_3 與 L_2 之銳夾角為 θ．$\overline{PQ}$ 為 L_1 與 L_2 之公垂線段(P 在 L_1 上且 Q 在 L_2 上)，則下列選項哪些是正確的？

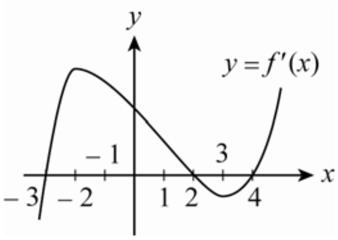
(1) P 點之坐標為 $(1,1,1)$　　(2)平面 E 的方程式為 $2x-y+2z=8$

(3) L_1 與 L_2 之公垂線段長為 3　　(4) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

(5) L_1 與 L_2 之公垂線方程式為 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{-2}$

5. 一正四面體之 4 個頂點在兩歪斜線 L_1：$\begin{cases}x=3+t\\y=-2-t\\z=0\end{cases}$ 與 L_2：$\begin{cases}x=-1+s\\y=-1+s\\z=1\end{cases}$ 上，其中 t 與 s 皆為任意實數，則此 4 個頂點之坐標可能為下列哪些選項？
(1) $(0,0,1)$　(2) $(2,2,1)$　(3) $(0,1,0)$　(4) $(-1,2,0)$　(5) $(-1,-1,1)$

6. 設實係數多項函數 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 之一階導函數 $y=f'(x)$ 與 x 軸交點的橫坐標分別為 $-3,\ 2,\ 4$，如右圖形所示，則下列選項哪些是正確的？
(1) $b>0$　(2) $d>0$　(3) $f(-2)$ 為極大值　(4) $f(4)$ 為極小值
(5)在區間 $(2,3)$ 為凹口向上



7. 一袋中有 5 個球，分別寫上 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ 號，今由其中任取一球記下其號碼後放回袋中，如此繼續 n 次，若 P_n 表記錄到 n 次時數字和為偶數的機率，則下列選項哪些是正確的？
(1) $P_2=\dfrac{12}{25}$　(2) $P_3=\dfrac{63}{125}$　(3) $P_n=\dfrac{1}{5}P_{n-1}+\dfrac{3}{5}$　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=\dfrac{1}{2}$　(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{2}-P_n)=\dfrac{1}{12}$

三、選填題（24 分）

A. 有 $A,\ B$ 兩棟大樓高度相等，一人站在此兩棟大樓底部之連線段上 P 點，測得 A 大樓之仰角為 60°，此人沿底部之連線段成垂直之方向走 100 公尺後到達 Q 點，再測得 A 大樓之仰角為 45°，B 大樓之仰角為 30°，則 P 點到 B 大樓底部和 P 點到 A 大樓底部距離的比值為 $\underline{\square.\square}$.（四捨五入到小數點後第一位）.

B. 四邊形 $ABCD$ 中，若 $\angle B=90°,\ \overline{AB}=4,\ \overline{BC}=3,\ \overline{CD}=14,\ \overline{AD}=11$，則 $\cos\angle BAD$ $=\underline{\ -0.\square\square\ }$.（四捨五入至小數點後第二位，$\sqrt{2}$ 的近似值是 1.414，$\sqrt{3}$ 的近似值是 1.732，$\sqrt{6}$ 的近似值是 2.450 .）

C. 對矩陣 $\begin{bmatrix}1 & a & -3 & 10\\2 & -1 & b & 5\\c & 3 & 2 & -1\end{bmatrix}$ 作列運算若干次後得到 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 3\\0 & 1 & 0 & -4\\0 & 0 & 1 & -5\end{bmatrix}$，則 $a+b+c=\underline{\square\square}$.

第貳部分：非選擇題（占 26 分）

一、設 R 代表坐標平面上由不等式 $1-\sqrt{4-y^2}\le x\le 0$ 所定義的區域，求函數 $3x-y$ 在區域 R 上的最大值與最小值．（13 分）

二、設四次多項式 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$ ．

(1)選取積分區間 $a\le x\le b$ ，使得定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 達到最小值，並求此最小值．（8 分）

(2)設 $c>0$ ，求證 $\int_{-c}^{c} f(x)dx$ 恆為正值．（5 分）

簡答:3,5,4,(234),(13),(24),(45), 2.6, 90 , 10

1	2	3	4	5	6	7	A	B	C
3	5	4	234	13	24	45	2.6	90	10

一.最大值 $\sqrt{3}$ ；最小值 $3-2\sqrt{10}$　二. (1) $-\dfrac{9}{10}$ ；(2)見詳解

數甲模擬試卷(4)

詳解:

1.參考答案：(3)

命題出處：第一冊　第一章　數與坐標系、第二冊　第一章　指數與對數

測驗目標：了解整數之個位數字規律與內插法的線性比例

試題解析：$\because x^{12}=7.27\cdots\times10^{31}\Rightarrow x=100\times\sqrt[12]{7.27\cdots\times10^{7}}$，令 $y=\sqrt[12]{7.27\times10^{7}}$，

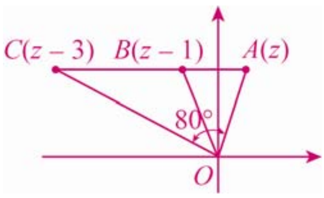
由內插法知 $\dfrac{7.27-7.2}{7.3-7.2}=\dfrac{y-4.51625}{4.52144-4.51625}\Rightarrow y\fallingdotseq4.519883$，$\therefore x=452$

2. 參考答案：(5)

命題出處：第二冊　第三章　三角函數的性質與應用

測驗目標：了解複數平面與複數極式的對應關係及兩複數相除的幾何意義

試題解析：設 $A(z),\ B(z-1),\ C(z-3)$，



$\because \dfrac{z-3}{z}=2(\cos80°+i\sin80°)$

$\Rightarrow \overline{OC}$ ： $\overline{OA}=2$：1 且 $\angle AOC=80°$，

又 $\overline{BC}$ ： $\overline{BA}=2$ ：1，

$\therefore \overline{OB}$ 平分 $\angle AOC\Rightarrow\dfrac{z-1}{z}$ 之主輻角為 40° $\Rightarrow\dfrac{z}{z-1}$ 主輻角為 320°

$\Rightarrow[(\sqrt{3}x)^2+(y+z)^2+z^2]\cdot(20)\ge12^2\quad\Rightarrow3x^2+y^2+2yz+2z^2\ge\dfrac{144}{20}=\dfrac{36}{5}$

3. 參考答案：(4)

命題出處：選修數學(I)　第一章　機率與統計(II)

測驗目標：了解條件機率與獨立事件性質

試題解析：① $a=\dfrac{\dfrac{C_2^2}{C_2^5}\times\dfrac{C_1^5C_1^4}{C_2^9}}{\dfrac{C_2^2}{C_2^5}}=\dfrac{5}{9}$.

②甲袋可能取出 2 白或 1 白 1 黑或 2 黑球放入乙袋，

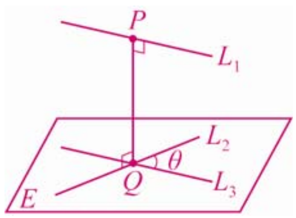
而甲袋剩下 3 黑球，所以取出的為 2 白球，

$$b=\frac{\dfrac{C_2^2}{C_2^5}\times\dfrac{C_1^5C_1^4}{C_2^9}}{\dfrac{C_2^2}{C_2^5}\times\dfrac{C_1^5C_1^4}{C_2^9}+\dfrac{C_1^2C_1^3}{C_2^5}\times\dfrac{C_1^4C_1^5}{C_2^9}+\dfrac{C_2^3}{C_2^5}\times\dfrac{C_1^3C_1^6}{C_2^9}}=\frac{10}{97}\ .$$

③同②，$c=\dfrac{\dfrac{C_1^2C_1^3}{C_2^5}\times\dfrac{C_1^4C_1^5}{C_2^9}}{\dfrac{C_2^2}{C_2^5}\times\dfrac{C_1^5C_1^4}{C_2^9}+\dfrac{C_1^2C_1^3}{C_2^5}\times\dfrac{C_1^4C_1^5}{C_2^9}+\dfrac{C_2^3}{C_2^5}\times\dfrac{C_1^3C_1^6}{C_2^9}}=\dfrac{60}{97}$.

$\therefore c>a>b$

4. 參考答案：(2)(3)(4)
命題出處：第三冊　第二章　空間中的直線與平面
測驗目標：空間中之平面方程式，兩歪斜線之距離、公垂線方程式與兩直線之夾角
試題解析：設 $P(2+t,5+4t,t)\in L_1,\ Q(2-s,2+2s,3+2s)\in L_2$,



又 $\overrightarrow{L_1}=(1,4,1),\ \overrightarrow{L_2}=(-1,2,2)$,

$\because \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{L_1}=0$ 且 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{L_2}=0\Rightarrow(t,s)=(-1,-1)$

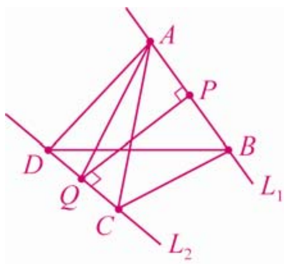
$\Rightarrow P(1,1,-1),\ Q(3,0,1)$,

$\therefore|\overrightarrow{PQ}|=3$ 且 $\overrightarrow{PQ}=(2,-1,2)\Rightarrow E$ ： $2x-y+2z=8$,

又 L_1 與 L_2 之公垂線方程式 $\overleftrightarrow{PQ}$ ： $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$,

$\overrightarrow{L_2}=(-1,2,2),\ \overrightarrow{L_3}=(1,4,1)\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{L_2}\cdot\overrightarrow{L_3}|}{|\overrightarrow{L_2}||\overrightarrow{L_3}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{4}$

5. 參考答案：(1)(3)
命題出處：第三冊　第二章　空間中的直線與平面
測驗目標：了解空間坐標與空間向量
試題解析：設 $P(3+t,-2-t,0)\in L_1,\ Q(-1+s,-1+s,1)\in L_2$,



又 $\overrightarrow{L_1}=(1,-1,0),\ \overrightarrow{L_2}=(1,1,0)$,

$\because \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{L_1}=0$ 且 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{L_2}=0\Rightarrow(t,s)=(-\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2})$,

$\therefore P(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0),\ Q(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1)\Rightarrow|\overrightarrow{PQ}|=1$,

如右圖，設 $\overline{AB}=a\Rightarrow\overline{AP}=\dfrac{a}{2},\ \overline{AQ}=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$,

$\because 1^2+(\dfrac{a}{2})^2=(\dfrac{\sqrt{3}a}{2})^2\Rightarrow a=\sqrt{2}=|\overrightarrow{L_1}|=|\overrightarrow{L_2}|$,

$\therefore \overrightarrow{AP} = \pm\frac{1}{2}(1,-1,0) \Rightarrow A(1,0,0)$ 或 $A(0,1,0)$，

同理 $\overrightarrow{CP} = \pm\frac{1}{2}(1,1,0) \Rightarrow C(1,1,1)$ 或 $C(0,0,1)$

6. 參考答案：(2)(4)

命題出處：選修數學(II)　第二章　導函數的應用

測驗目標：了解函數圖形的凹性與極值

試題解析：由圖形知

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = 4a(x+3)(x-2)(x-4) = 4a(x^3 - 3x^2 - 10x + 24)$

$\Rightarrow 3b = -12a,\ 2c = -40a,\ d = 96a$，

$\because a > 0$（由圖形知）$\Rightarrow b < 0$ 且 $c < 0$ 且 $d > 0$，

又由下表知 $f(-3)$ 與 $f(4)$ 為極小值， $f(2)$ 為極大值，

x		-3		2		4	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$f(-3)$	↗	$f(2)$	↘	$f(4)$	↗

$f''(x) = 4a(3x^2 - 6x - 10) > 0$

$\Rightarrow x > \frac{3+\sqrt{39}}{3} = 3.\cdots$ 或 $x < \frac{3-\sqrt{39}}{3} = -1.\cdots$

$\Rightarrow$ 區間 $(2,3)$ 為凹口向下，故選(2)(4)

7. 參考答案：(4)(5)

命題出處：第四冊　第二章　排列組合、選修數學(I)　第一章　機率與統計(II)
第一冊　第二章　數列與級數

測驗目標：1. 能計算重複試驗的機率並找出遞迴關係式
2. 了解極限的基本概念，並能計算無窮等比級數之和

試題解析：(1)　$P_1 = \frac{2}{5},\ P_2 = (1-P_1)\times\frac{3}{5} + P_1\times\frac{2}{5} = \frac{13}{25}$.

(2)　$P_3 = (1-P_2)\times\frac{3}{5} + P_2\times\frac{2}{5} = \frac{62}{125}$.

(3)　$P_n = \frac{3}{5}(1-P_{n-1}) + \frac{2}{5}P_{n-1} = -\frac{1}{5}P_{n-1} + \frac{3}{5}$.

(4)　由(3)知 $(P_n - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{5}(P_{n-1} - \frac{1}{2})$，

設 $b_n = P_n - \frac{1}{2}$，則 $b_n = -\frac{1}{5}b_{n-1}$，$\langle b_n \rangle$ 為公比為 $-\frac{1}{5}$ 之等比數列，

$\because b_1 = P_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10} \Rightarrow b_n = -\frac{1}{10}\times(-\frac{1}{5})^{n-1}$，

$\therefore P_n = b_n + \frac{1}{2} \Rightarrow P_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \times (-\frac{1}{5})^{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{2}$.

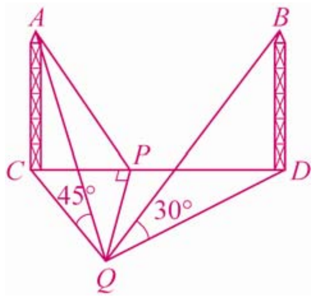
(5) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2} - P_n) = \frac{1}{10} \sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{5})^{n-1} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{1-(-\frac{1}{5})} = \frac{1}{12}$

A. 參考答案：2.6

命題出處：第二冊　第二章　三角函數的基本概念

測驗目標：了解簡易三角測量

試題解析：如右圖，設大樓高度 $\overline{AC} = \overline{BD} = h$ 公尺，



$\triangle ACP$ 中，知 $\overline{CP} = \overline{AC} \cot 60° = \frac{h}{\sqrt{3}}$,

$\triangle ACQ$ 中，知 $\overline{CQ} = \overline{AC} \cot 45° = h$,

$\triangle CPQ$ 中，知 $\overline{CP}^2 + \overline{PQ}^2 = \overline{CQ}^2 \Rightarrow \frac{h^2}{3} + 100^2 = h^2 \Rightarrow h = 50\sqrt{6}$,

又 $\overline{CP} = \frac{h}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{2}$,

$\triangle BDQ$ 中，知 $\overline{DQ} = \overline{BD} \cot 30° = \sqrt{3}h = 150\sqrt{2}$,

$\triangle DPQ$ 中，知 $\overline{DP}^2 = \overline{DQ}^2 - \overline{PQ}^2 \Rightarrow \overline{DP} = 50\sqrt{14}$ ，$\therefore \frac{\overline{DP}}{\overline{CP}} = \sqrt{7} \fallingdotseq 2.6$

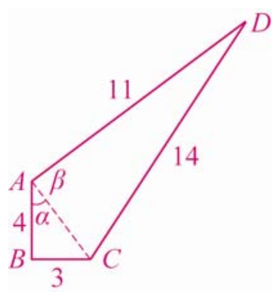
B. 參考答案：-0.90

命題出處：第二冊　第二章　三角函數的基本概念

　　　　　第二冊　第三章　三角函數的性質與應用

測驗目標：了解餘弦定理與和角公式的應用

試題解析：如右圖，



$\triangle ABC$ 中，$\overline{AC} = 5$ 且 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$，$\cos\alpha = \frac{4}{5}$,

$\triangle ACD$ 中，$\cos\beta = \frac{11^2 + 5^2 - 14^2}{2\cdot 11\cdot 5} = -\frac{5}{11} \Rightarrow \sin\beta = \frac{4\sqrt{6}}{11}$,

$\therefore \cos\angle BAD = \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$= \frac{4}{5} \times (-\frac{5}{11}) - \frac{3}{5} \times \frac{4\sqrt{6}}{11} = \frac{-20-12\sqrt{6}}{55} \fallingdotseq -0.90$

C. 參考答案：10

命題出處：選修數學(I)　第二章　矩陣

測驗目標：了解矩陣與聯立方程組的關係

試題解析：將矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & a & -3 & 10 \\ 2 & -1 & b & 5 \\ c & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ 視為聯立方程組 $\begin{cases} x+ay-3z=10 \\ 2x-y+bz=5 \\ cx+3y+2z=-1 \end{cases}$ 之增廣矩陣，

由 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$ 知 $(x, y, z)=(3, -4, -5)$，代入聯立方程組，

$\therefore \begin{cases} 3-4a+15=10 \\ 6+4-5b=5 \\ 3c-12-10=-1 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=2+1+7=10$

一. 參考答案：最大值 $\sqrt{3}$；最小值 $3-2\sqrt{10}$

命題出處：第三冊　第三章　圓與球

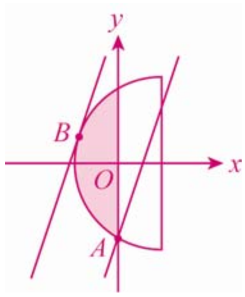
測驗目標：了解圓區域與圓切線方程式的應用

試題解析：$x=1-\sqrt{4-y^2} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2+y^2=4 \\ x-1\le 0 \end{cases}$ 為圓心 $K(1,0)$，半徑 $r=2$ 之左半圓 Γ，

$\therefore$ 區域 R 為右圖鋪底部分區域（含邊界），

設 $3x-y=k \Rightarrow L$：$y=3x-k$ 表斜率為 3 之平行直線系，

$\because (x, y)$ 在 Γ 上 $\Rightarrow L$ 與 Γ 相交．



① $x=0$ 代入 $\Gamma \Rightarrow A(0, -\sqrt{3})$，

L 通過點 $A(0,-\sqrt{3}) \Rightarrow k=\sqrt{3}$．

② L 與 Γ 相切 $\Rightarrow d(K, L)=r=2 \Rightarrow \dfrac{|3-k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=2$

$\Rightarrow k=3\pm 2\sqrt{10}$（正不合）.

$\therefore$ 由①②知 $3-2\sqrt{10}\le k\le\sqrt{3}$，故最大值為 $\sqrt{3}$，最小值為 $3-2\sqrt{10}$

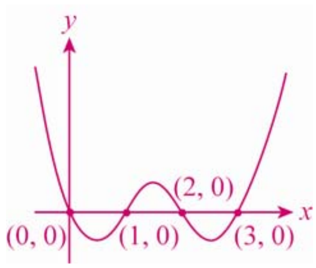
.

二. 參考答案：(1) $-\dfrac{9}{10}$；(2)見詳解

命題出處：選修數學(II)　第三章　多項函數的積分

測驗目標：了解定積分及其應用

試題解析：(1)　如右圖，



$f(x)$ 與 x 軸交於 $(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0)$，

又 $f(x)=x^4-6x^3+11x^2-6x$，

若 $0\le x\le 1$，則

$\int_0^1 f(x)dx=(\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{2}x^4+\frac{11}{3}x^3-3x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{5}-\frac{3}{2}+\frac{11}{3}-3=-\frac{19}{30}\cdots\cdots①$，

若 $0 \le x \le 2$，則

$$\int_0^2 f(x)dx = (\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{11}{3}x^3 - 3x^2)\Big|_0^2 = \frac{32}{5} - 24 + \frac{88}{3} - 12 = -\frac{8}{30} \cdots\cdots ②,$$

由①②知 $\int_1^2 f(x)dx = \frac{11}{30}$，

$\therefore$ 取 $0 \le x \le 3$ 時，$\int_0^3 f(x)dx = \frac{243}{5} - \frac{243}{2} + 99 - 27 = -\frac{9}{10}$ 最小．

(2) $\int_{-c}^{c} f(x)dx = (\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{11}{3}x^3 - 3x^2)\Big|_{-c}^{c}$

$$= \frac{1}{5}[c^5 - (-c)^5] - \frac{3}{2}[c^4 - (-c)^4] + \frac{11}{3}[c^3 - (-c)^3] - 3[c^2 - (-c)^2]$$

$$= \frac{2}{5}c^5 + \frac{22}{3}c^3 > 0$$ 恆成立（ $c > 0$ ）