104 數甲模擬試卷(3)

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 77 分）

一、單選題（18 分）

1. △ABC 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=3$，過 A 點作直線 BC 的垂直線，設垂足為 H，若 $\overrightarrow{AH}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$，則△ ABC 的面積為

   (1) 3　(2) $\sqrt{10}$　(3) $2\sqrt{3}$　(4) $\sqrt{14}$　(5) 4

2. △ABC 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=4$，$\overline{CA}=5$，若 P 點在△ABC 內，P 點至 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CA}$ 距離分別為 x，y，z，求 $3x^2+y^2+2yz+2z^2$ 之最小值？

   (1) $\frac{9}{5}$　(2) $\frac{12}{5}$　(3) $\frac{18}{5}$　(4) $\frac{24}{5}$　(5) $\frac{36}{5}$

3. 在這景氣不好的情況下，某位年輕人逢低買了一間八百萬的新房子，第一階段付了二百萬的頭期款，第二階段準備向銀行貸款六百萬，貸款期限是二十年，其中三百萬可享受政府的優惠年利率 1.2%．另外的三百萬是依銀行的公告年利率 2.4%．假設利率不再變動，試問這名年輕人每個月需還款最接近下列哪個金額？

   （$(1.001)^{240}=1.2711$，$(1.002)^{240}=1.6153$，$(1.012)^{240}=17.5115$，$(1.024)^{240}=296.476$）

   (1)2 萬　(2)3 萬　(3)4 萬　(4)5 萬　(5)6 萬

二、多選題（32 分）

4. 設 A，B 皆為 2 階方陣且 I，O 分別為 2 階單位方陣與零矩陣，則下列何者<u>錯誤</u>？

   (1)若 k 為實數，$\det(kA)=k\det(A)$　(2)若 $AB=AC$ 且 $\det(A)\neq 0$，則 $B=C$

   (3)若 A，B 皆有反方陣，則 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

   (4)若 $A^2=I$，則 $A=I$ 或 $A=-I$

   (5)若 $AB=O$ 且 A 有反方陣，則 $B=O$

5. 空間坐標中三點 $A(1,1,1)$，$B(0,2,2)$，$C(2,0,3)$，則以下哪些選項是正確的？

   (1) △ABC 是銳角三角形　(2) △ABC 面積為 $3\sqrt{2}$

   (3) △ABC 平面方程式為 $x+y=2$

   (4) 若平面 ABC 與平面 E：$x+y-2z=0$ 的夾角為 θ，則 $\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

   (5) △ABC 在平面 E：$x+y-2z=0$ 上的正射影面積為 $\sqrt{6}$

6. 下列敘述何者正確？

(1)函數 $f(x)=\dfrac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(1-x)(2-x)(3-x)}$，則 $f(x)$ 在 $x=0$ 處的導數為 1

(2)設 $f(x)$ 為可微分的函數，且 $f'(2)=f(2)=5$，則 $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{f(x^2)-f(2)}{x^2-2}=10$

(3)函數 $f(x)=x|x|$ 為一可微分函數

(4)函數 $f(x)=x[x]$ 在 $x=0$ 時可微分

(5)兩曲線 $y=x^3-3x$， $y=x^3-3x+32$，其公切線方程式為 $9x-y+16=0$

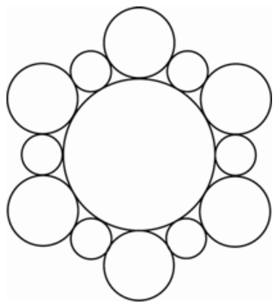
7. 設 $f(x)$為三次實係數多項式，且知複數 $i+1$ 為 $f(x)=0$ 之一解。則下列哪些敘述是正確的

(1) $f(i-1)=0$　(2) $f(2+i)\neq 0$　(3) 沒有實數 x 滿足 $f(x)=x$

(4) 存在實數 x 滿足 $f(x^3)=0$　(5) 若 $f(0)>0$ 且 $f(2)<0$，則 $f(4)<0$

三、選填題（28 分）

A. 104 年全國壯年桌球排名賽 35 歲組單打賽共三十二枝籤（共 32 名選手參賽），每名選手勢均力敵，若進入 16 強可得 3 分的積分，進入 8 強可得 5 分的積分，進入 4 強可得 10 分的積分，進入冠亞軍賽可得 15 分的積分，得冠軍者可得 20 分的積分，試問每位選手拿到的積分之期望值為 $\underline{\dfrac{\bigcirc\bigcirc}{\bigcirc\bigcirc}}$.



B. 如右圖，是由三種大小圓形組成，其小、中、大圓半徑分別為 r_1，r_2，r_3，則 $\dfrac{r_1}{r_3}$ 的比值為 $\underline{\bigcirc-\sqrt{\bigcirc}}$.

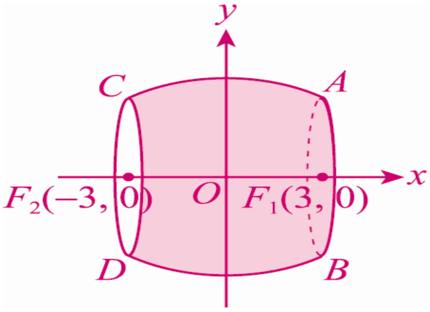
C. 某位 SBL 籃球明星打了一整年的比賽，球評記錄他每一場各項攻防，統計後當他投進一球後，下一球投進機率是 0.8，若不進時，則下一球投進機率是 0.7，就長期而言，他的進球命中率= $\underline{\dfrac{\bigcirc}{\bigcirc}}$.

D. 若 a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，$b_3\in\boldsymbol{R}$，且 $(a_k+b_ki)^3=-8i$，其中 $k=1$，2，3，則 $\sum\limits_{k=1}^{3}|a_k+b_k|=\underline{\bigcirc-\bigcirc\sqrt{\bigcirc}}$。

第貳部分：非選擇題（占 22 分）

數學甲考科

一、有一個桶狀的容器，如圖所示，其外表曲線滿足橢圓方程式：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$，令其兩焦點分別為 F_1， F_2，正焦弦長分別為 $\overline{AB}$， $\overline{CD}$，求以 AC 弧繞 x 軸一圈，所得的旋轉體的體積？（桶狀容器的厚度不計）（12 分）



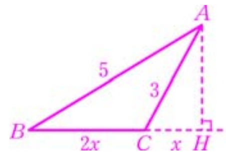
二、設 x，y 滿足 $\begin{cases} xy \le 81 \\ x^3y \le 729 \\ x \ge 1 \\ y \ge 1 \end{cases}$，若 $3x^2y$ 的最大值 M，最小值 m，則 $M+m$ 之值為何？（10 分）

解　答

1	2	3	4	5	6	7	A	B	C	D
4	5	2	134	34	135	245	$\frac{89}{16}$	$2-\sqrt{3}$	$\frac{7}{9}$	$2+2\sqrt{3}$

一. $\frac{2112\pi}{25}$　　二. 732

解析:



1. $\overrightarrow{AH}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$

$\Rightarrow\overrightarrow{BH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overline{BC}:\overline{CH}=2:1$，設$\overline{BC}=2x$，$\overline{CH}=x$，由$\overline{AH}^2=5^2-(3x)^2=3^2-x^2\Rightarrow x=\sqrt{2}$，而$\overline{AH}$

$=\sqrt{3^2-2}=\sqrt{7}$，故$\triangle ABC$的面積$=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AH}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{14}$，故選(4)

2. 由面積公式：$\triangle ABC=\triangle PAB+\triangle PBC+\triangle PCA\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot3\cdot4=\frac{1}{2}(3x+4y+5z)\Rightarrow3x+4y+5z=12$

由柯西不等式：$\Rightarrow[(\sqrt{3}x)^2+(y+z)^2+z^2]\cdot[(\sqrt{3})^2+4^2+1^2]\geq[3x+4(y+z)+z]^2$

$\Rightarrow[(\sqrt{3}x)^2+(y+z)^2+z^2]\cdot(20)\geq12^2\quad\Rightarrow3x^2+y^2+2yz+2z^2\geq\frac{144}{20}=\frac{36}{5}$

3. 設每個月還 $a+b$ 元，共 $12\times20=240$ 期　　月利率分別為 $\frac{1.2\%}{12}=0.1\%$，$\frac{2.4\%}{12}=0.2\%$

① $3000000\times(1+0.1\%)^{240}=a\times(1.001)^{239}+a\times(1.001)^{238}+\cdots+a$

$\Rightarrow3000000\times1.2711=\frac{a(1.001^{240}-1)}{1.001-1}=271.1a\Rightarrow a\fallingdotseq14066$

② $3000000\times(1+0.2\%)^{240}=b\times(1.002)^{239}+b\times(1.002)^{238}+\cdots+b$

$\Rightarrow3000000\times1.6153=\frac{b(1.002^{240}-1)}{1.002-1}=307.65b\Rightarrow b\fallingdotseq15751$

$a+b\fallingdotseq29817$，接近 3 萬元

4. (1) $\det(kA)=k^2\det(A)$，例如：$\begin{vmatrix}2&4\\2&6\end{vmatrix}=2^2\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}$ $\therefore$錯誤　(2) $AB=AC$ $\because\det(A)\neq0$ $\therefore A^{-1}$ 存在 $\Rightarrow A^{-1}AB=A^{-1}AC\Rightarrow B=C$ $\therefore$正確　(3) $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$ $\therefore$錯誤

(4)令 $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ $\therefore$錯誤　(5) $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ $\therefore$正確

故選(1)(3)(4)

5. (1) $\overline{AB}=\sqrt{3}$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=\sqrt{6}$，　$\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2\Rightarrow\triangle ABC$為直角三角形。

(2) $\triangle ABC$面積$=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$。

(3) $\overrightarrow{AB}=(-1,1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,-1,2)$　$\Rightarrow$ 平面 ABC 法向量：$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=3(1,1,0)$

$\Rightarrow$ 平面 ABC 方程式：$x+y=2$。

(4) 平面 E 法向量$\vec{n'}=(1,1,-2)$，若平面 ABC 與平面 E 夾角為 θ，則 $\cos\theta=\pm\frac{6}{6\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$。

(5) $\triangle ABC$ 在 E 上投影面積$=\triangle ABC$ 面積$\times|\cos\theta|=\frac{\sqrt{6}}{2}$。

6. (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(1-x)(2-x)(3-x)}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(1-x)(2-x)(3-x)}=\frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot2\cdot3}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{f(x^2)-f(2)}{x^2-2}=\lim\limits_{x^2\to 2}\dfrac{f(x^2)-f(2)}{x^2-2}$（令 $x^2=h$）$=\lim\limits_{h\to 2}\dfrac{f(h)-f(2)}{h-2}=f'(2)=5$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\cdot x-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$　$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x\cdot(-x)-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$

$\because \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$　$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 可微

又 $x>0\Rightarrow f(x)=x^2$ 可微，$x<0\Rightarrow f(x)=-x^2$ 可微　　$\therefore f(x)=x|x|$ 為可微函數

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\cdot[x]}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}[x]=0$　　$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x\cdot[x]}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}[x]=-1$

$\because \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$　　$\therefore f(x)=x[x]$ 在 $x=0$ 不可微

(5)設兩曲線 $y=x^3-3x$ 與 $y=x^3-3x+32$ 分別與公切線切於 $A(t,t^3-3t)$，$B(s,s^3-3s+32)$

則過 A 之切線斜率 $y'|_t=3x^2-3=3t^2-3$　　$\Rightarrow$ 切線：$y=(3t^2-3)x-2t^3\cdots\cdots$①

則過 B 之切線斜率 $y'|_s=3x^2-3=3s^2-3\Rightarrow$ 切線：$y=(3s^2-3)x-2s^3+32\cdots\cdots$②

由①與②同義：$\begin{cases}3t^2-3=3s^2-3\\-2t^3=-2s^3+32\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=-2\\s=2\end{cases}$　　$\therefore$ 公切線：$y=9x+16$

7.由實係數方程式虛根成對定理可知：$1-i$ 亦為 $f(x)=0$ 之一根，(注意不是 $i-1$)

則〔$x-(1+i)$〕〔$x-(1-i)$〕$=x^2-2x+2$ 為 $f(x)$ 之一因式，設 $f(x)=(ax-b)(x^2-2x+2)$

(1) 應是 $f(1-i)=0$ 而不是 $f(i-1)=0$

(2) $f(2+i)\neq 0$ ($f(x)=0$ 除 $1\pm i$ 外，無其他虛根)

(3) 令 $F(x)=f(x)-x=0$，$\deg F(x)=3$　$\therefore$ $F(x)=0$ 有三個根

由虛根成雙定理可知：虛根必成對出現，故三根中必至少有一實根

(4) $f(x^3)=(ax^3-b)(x^6-2x^3+2)=0$，$\deg f(x^3)=9$。同(3)的理由，$f(x^3)=0$ 的九根中至少有一實根

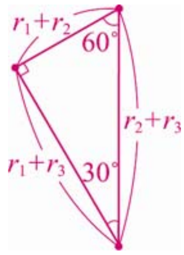
(5) 因 $f(0)f(2)<0$，由勘根定理可知在 0 與 2 間有一實根，

又已知有二虛根 $1\pm i$，故不可能再有其他實根　$\therefore$ $f(4)$與 $f(2)$同號 $\Rightarrow f(4)<0$

故選(2)(4)(5)

A.　$E(x)=\sum Pm=3\cdot\dfrac{1}{2}+5\cdot\dfrac{1}{4}+10\cdot\dfrac{1}{8}+15\cdot\dfrac{1}{16}+20\cdot\dfrac{1}{32}=\dfrac{178}{32}=\dfrac{89}{16}$

	16 強	8 強	4 強	2 強	冠軍
積分（m）	3	5	10	15	20
機率（P）	$\dfrac{1}{2}$	$(\dfrac{1}{2})^2$	$(\dfrac{1}{2})^3$	$(\dfrac{1}{2})^4$	$(\dfrac{1}{2})^5$



B. 如圖所示

令 $\begin{cases}r_1+r_2=t\cdots\cdots①\\r_2+r_3=2t\cdots\cdots②\\r_1+r_3=\sqrt{3}t\cdots\cdots③\end{cases}$　　$\dfrac{①+②+③}{2}\Rightarrow r_1+r_2+r_3=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}t\cdots\cdots④$

④−①：$r_3=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}t$　　　④−②：$r_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}t$

④−③：$r_2=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}t \Rightarrow \dfrac{r_1}{r_3}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$

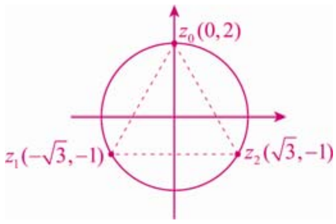
C. 設投球命中的機率是 x，不進的機率是 y

$$\begin{bmatrix}0.8 & 0.7\\ 0.2 & 0.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}0.8x+0.7y=x\\ 0.2x+0.3y=y\end{cases}\Rightarrow 0.2x=0.7y \text{ 又 } x+y=1 \quad \therefore x=\frac{7}{9}，\ y=\frac{2}{9} \text{ 故所求}=\frac{7}{9}$$

D. 令 $z=a+bi\Rightarrow z^3=-8i=8[0+(-i)]=8(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2})$

$$\Rightarrow z_k=2\cdot(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3})，\ k=0，1，2 \quad z_0=2\cdot(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=2i$$

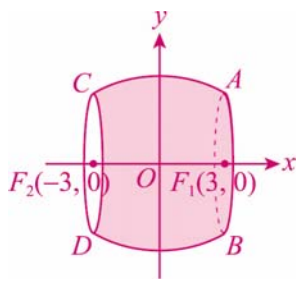
$$z_1=2\cdot(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6})=-\sqrt{3}-i \quad z_2=2\cdot(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})=\sqrt{3}-i$$



令 $a_1=0$，$b_1=2$，$a_2=-\sqrt{3}$　$b_2=-1$，$a_3=\sqrt{3}$，$b_3=-1$

故 $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\left|a_k+b_k\right|=\left|0+2\right|+\left|-\sqrt{3}-1\right|+\left|\sqrt{3}-1\right|=2+2\sqrt{3}$

一. 橢圓：$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1 \Rightarrow$ 中心 $O(0,0)$，$a=5$，$b=4$，$c=3$



$\Rightarrow F_1(3,0)$，$F_2(-3,0)$ 橢圓上半部曲線函數為 $y=\sqrt{16-\dfrac{16}{25}x^2}$

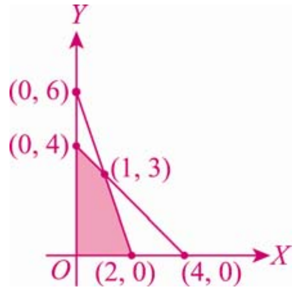
所　求　體　積 $=\displaystyle\int_{-3}^{3}(\sqrt{16-\frac{16}{25}x^2})^2\pi\,dx \quad =2\pi\int_0^3(16-\frac{16}{25}x^2)\,dx=\frac{32\pi}{25}\int_0^3(25-x^2)\,dx$

$$=\frac{32\pi}{25}(25x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^3=\frac{32\pi}{25}[25(3-0)-\frac{1}{3}(3^3-0)]=\frac{32\pi}{25}\cdot(75-9)=\frac{2112\pi}{25}.$$

二. $\begin{cases}\log_3 xy\le\log_3 81\\ \log_3 x^3y\le\log_3 729\\ \log_3 x\ge\log_3 1\\ \log_3 y\ge\log_3 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_3 x+\log_3 y\le 4\\ 3\log_3 x+\log_3 y\le 6\\ \log_3 x\ge 0\\ \log_3 y\ge 0\end{cases}$　　令 $X=\log_3 x$，$Y=\log_3 y \Rightarrow \begin{cases}X+Y\le 4\\ 3X+Y\le 6\\ X\ge 0\\ Y\ge 0\end{cases}$

求 $\log_3 3x^2y=\log_3 3+2\cdot\log_3 x+\log_3 y=1+2X+Y$ 之最大值、最小值

(X,Y)	$1+2X+Y$	$3x^2y$	
$(0,0)$	1	3	最小值 m
$(2,0)$	5	243	
$(1,3)$	6	729	最大值 M
$(0,4)$	5	243	



$\therefore$

$M+m=729+3=732$