第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題共占 83 分)

一、 單選題：(24 ％)

1. 參考答案：(4)

試題解析：$a=\sqrt{5}^{\sqrt{5}}=5^{\frac{\sqrt{5}}{2}}$ ，$\log a=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\log 5=1.118\times 0.699\approx 0.781$

$\log 6=\log 2+\log 3=0.3010+0.4771=0.7781$

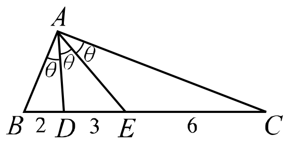
$\log 6<\log a<\log 7$ ，故 a 之整數部分為 6

2. 參考答案：(1)

試題解析：$z_1=-1+i=\sqrt{2}(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i)=\sqrt{2}(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4})$ ，

$$z_2=(z_1)^3=[\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})]^3=2\sqrt{2}(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4})=2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

$\triangle OP_1P_2$ 之面積$=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=2$



3. 參考答案：(1)

試題解析：利用內角平分線定理，假設 $\overline{AB}=2a,\ \overline{AE}=3a,\ \overline{AD}=b,\ \overline{AC}=2b$，

引入餘弦函數得 $\cos\angle BAD=\dfrac{4a^2+b^2-4}{2\cdot 2a\cdot b}=\dfrac{b^2+9a^2-9}{2\cdot b\cdot 3a}=\dfrac{9a^2+4b^2-36}{2\cdot 3a\cdot 2b}$

$$\Rightarrow\ \frac{4a^2+b^2-4}{2}=\frac{b^2+9a^2-9}{3}=\frac{9a^2+4b^2-36}{6}$$

$\Rightarrow\ 6a^2=b^2+6$ 與 $9a^2=2b^2-18$，

則 $a=\sqrt{10},\ b=3\sqrt{6}$，得$\triangle ABC$ 的三邊長為 $11,\ 2\sqrt{10},\ 6\sqrt{6}$，

故最短邊長為 $2\sqrt{10}$.

二、多選題：(24 ％)

4. 參考答案：(1) (4) (5)

試題解析：(1)因為 $\log x+\log y=5,\ \log x\cdot\log y=2$，

所以 $\log x,\log y$ 為 $(t-\log x)\cdot(t-\log y)=0$ 之二根,

即 $t^2-(\log x+\log y)t+\log x\cdot\log y=0$

$\Rightarrow\ t^2-5t+2=0$

$$\Rightarrow\ t=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2},$$

又 $0<x<y$，則 $\log x=\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$，正確.

(2)因為 $\log x+\log y=5,$ 所以 $\log xy=5,\ xy=10^5=100000$，錯誤.

(3)因為 $\log y=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\approx\dfrac{5+4.2}{2}=4.6$，錯誤.

(4)因為 $\log y=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\approx\dfrac{5+4.2}{2}=4.6$，所以 $\log y$ 之首數為 4，正確.

(5)因為 $\log y$ 之首數為 4，所以 y 之整數部分為 5 位數，正確.

5. 參考答案：(1) (2) (3) (4) (5)

試題解析：

因為 $a_n=\begin{vmatrix} n & n+1 & 0 \\ n+2 & n+1 & n+2 \\ n+2 & 0 & n+2 \end{vmatrix}$

$=n(n+1)(n+2)+0+(n+1)(n+2)^2-0-0-(n+1)(n+2)^2$

$=n(n+1)(n+2)$.

(1) $a_1=1\cdot2\cdot3=6$，正確.

(2) $a_{99}=99\cdot100\cdot101=999900$，正確.

(3) $a_n=n(n+1)(n+2)$，正確.

(4)因為 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)}\right]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}\right)$,

所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n\cdot(n+1)}-\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{11\cdot12}\right)=\frac{65}{264}$，正確.

(5)因為 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$,

所以 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+1)}\right)=\frac{1}{4}$，正確.

6. 參考答案：(1) (4)

試題解析：① $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$，錯誤，除非 $AB=BA$.

② 若 $AB=O_2$，且 $\det(A)\neq 0$，則 $B=O_2$，正確.

因為 $\det(A)\neq 0$，所以 A^{-1} 存在，

又 $AB=O_2$，則 $A^{-1}(AB)=A^{-1}O_2 \Rightarrow (A^{-1}A)B=O_2 \Rightarrow B=O_2$.

③ 若 $k\in \boldsymbol{R}$，則 $\det(kA)=k\det(A)$，錯誤，應更正為 $\det(kA)=k^2\det(A)$.

④ $(AB)^T=A^TB^T$，其中 A^T 為 A 矩陣的轉置矩陣，錯誤，應更正為 $(AB)^T=B^TA^T$.

⑤ 若 $AB=AC$，且 $\det(A)\neq 0$，則 $B=C$ 正確.

因為 $\det(A)\neq 0$，所以 A^{-1} 存在，又 $AB=AC$，

則 $A^{-1}(AB)=A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B=(A^{-1}A)C \Rightarrow B=C$.

⑥ $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$，其中 A^{-1} 為 A 矩陣的乘法反矩陣，錯誤，應更正為 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

7. 參考答案(1)(2)

當 $f(x)$ 在 $x=c$ 處是遞增的，則 $f'(c)>0\Rightarrow$ 選項(3)不合

當 $f(x)$ 在 $x=c$ 處是遞減的，則 $f'(c)<0\Rightarrow$ 選項(5)不合

當 $f(x)$ 在 $x=c$ 處是凹口朝上的，

則 $f''(c)>0\Rightarrow$ 選項(4)不合

8. 參考答案(2)(5)

設 $\int_0^2 f(t)dt=c$，其中 c 爲常數，則 $f(x)=x^3-2cx^2+9x-\frac{3}{2}$

$\int_0^2 f(t)dt=c\Rightarrow \frac{1}{4}t^4-\frac{2}{3}ct^3+\frac{9}{2}t^2-\frac{3}{2}t\Big|_0^2=c$

$\Rightarrow 4-\frac{16}{3}c+18-3=c\Rightarrow c=3$

$\therefore \int_0^2 f(t)dt=3$，$f(x)=x^3-6x^2+9x-\frac{3}{2}$

$f'(x)=3x^2-12x+9$

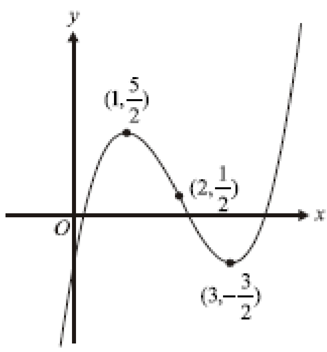
$=3(x^2-4x+3)=3(x-1)(x-3)$

$f''(x)=6x-12=6(x-2)$，

$f(x)$ 的圖形如右，

其中 $(1,\frac{5}{2})$、$(3,-\frac{3}{2})$ 爲頂點，

$(2,\frac{1}{2})$ 爲反曲點



三、選填題：(24 ％)

A.　參考答案：$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

試題解析：令 x 軸上的點 $P(t, 0, 0),\ t\in\boldsymbol{R}$； $L:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{4}$ 上的點 $Q(s, 2s, 4s+1),\ s\in\boldsymbol{R}$,

又 x 軸的平行向量為 $(1, 0, 0)$, L 的平行向量為 $(1, 2, 4)$,

則 $(s-t,\ 2s,\ 4s+1)\cdot(1, 0, 0)=0\ \Rightarrow\ s-t=0$,

又 $(s-t,\ 2s,\ 4s+1)\cdot(1, 2, 4)=0\ \Rightarrow\ s-t+4s+16s+4=0\ \Rightarrow\ s=-\dfrac{1}{5}$,

得 $P(-\dfrac{1}{5}, 0, 0),\ Q(-\dfrac{1}{5}, -\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{5})$,

則 $\overline{PQ}=\sqrt{0^2+(-\dfrac{2}{5})^2+(\dfrac{1}{5})^2}=\sqrt{\dfrac{5}{25}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

B.　參考答案：$\dfrac{89}{16}$

試題解析：

	16 強	8 強	4 強	2 強	冠軍
積分（m）	3	5	10	15	20
機率（P）	$\dfrac{1}{2}$	$(\dfrac{1}{2})^2$	$(\dfrac{1}{2})^3$	$(\dfrac{1}{2})^4$	$(\dfrac{1}{2})^5$

$$\Rightarrow E(x)=\sum Pm=3\cdot\frac{1}{2}+5\cdot\frac{1}{4}+10\cdot\frac{1}{8}+15\cdot\frac{1}{16}+20\cdot\frac{1}{32}=\frac{178}{32}=\frac{89}{16}$$

C.　參考答案：59

試題解析：因為滿足 $f(x), \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-2x^3}{x^2}=1$, 所以 $\deg f(x)=3$,

令 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, 其中 $a,b,c,d\in\boldsymbol{R}$,

由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d-2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(a-2)x+b+\dfrac{c}{x}+\dfrac{d}{x^2}\right]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(a-2)x+b\right]=1$,

知 $a=2,\ b=1$;

由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x}=\lim\limits_{x\to0}(ax^2+bx+c+\dfrac{d}{x})=\lim\limits_{x\to0}(c+\dfrac{d}{x})=-3$,

知 $c=-3,\ d=0$.

所以 $f(x)=2x^3+x^2-3x$,

利用餘式定理得 $e=f(3)=2\times3^3+3^2-3\times3=54$,

又 $f(x)=2x^3+x^2-3x=x(x-1)(2x+3)$,

得 $h=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x-1)(2x+3)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\left[x(2x+3)\right]=5$,

則 $e+h=54+5=59$.

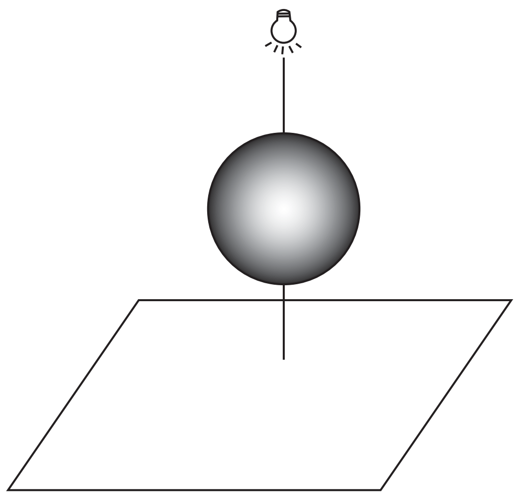
D. 參考答案：$\dfrac{7}{9}$

試題解析：設投球命中的機率是 x，不進的機率是 y

$$\begin{bmatrix}0.8 & 0.7\\0.2 & 0.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}0.8x+0.7y=x\\0.2x+0.3y=y\end{cases}$$

$\Rightarrow 0.2x=0.7y\Rightarrow 2x=7y$ 又 $x+y=1$

$\therefore x=\dfrac{7}{9}$， $y=\dfrac{2}{9}$ 故所求 $=\dfrac{7}{9}$



第貳部分：非選擇題 (18 %)

一、參考答案：$8+2\sqrt{7}$ 公寸

命題出處：第三冊第二章直線與圓

測驗目標：坐標化處理幾何問題，
知道切線的應用處理

試題解析：

此題可以圓來處理，

依題意得圓半徑 $r=3$，

設切線 L 為 $y=m(x-6)$

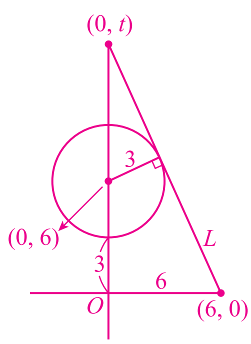
$\Rightarrow mx-y-6m=0$，圓心為 $C(0,\ 6)$，

利用 $d(C,\ L)=r\Rightarrow\dfrac{|-6-6m|}{\sqrt{m^2+1}}=3\Rightarrow\dfrac{|2m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

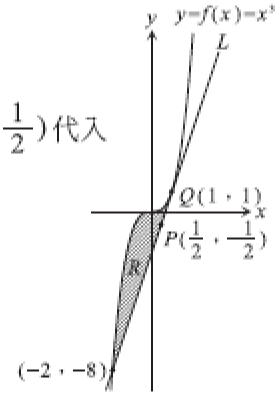
$\Rightarrow m^2+1=4m^2+8m+4\Rightarrow3m^2+8m+3=0$， $m=\dfrac{-8\pm2\sqrt{7}}{6}$，

取 $m=\dfrac{-4-\sqrt{7}}{3}$， $\therefore L$： $y=\dfrac{-4-\sqrt{7}}{3}(x-6)$， 令 $x=0\Rightarrow y=8+2\sqrt{7}=t$，

所以光源離板面至少 $8+2\sqrt{7}$ 公寸．



二、(1) $\dfrac{27}{4}$　　(2)最大值＝2，最小值＝－2



【詳解】(1) $f(x)=x^3$，$f'(x)=3x^2$，設切點 $Q(t，t^3)$

過 Q 之切線 $L：y-t^3=3t^2(x-t)$，$P(\frac{1}{2}，-\frac{1}{2})$ 代入

$-\frac{1}{2}-t^3=3t^2(\frac{1}{2}-t)$　∴ $4t^3-3t^2-1=0$

$(t-1)(4t^2+t+1)=0$，又 $4t^2+t+1$ 恆正

（∵ $D=1^2-4(4)(1)<0$）

∴ $t=1$，$Q(1，1)$

$L：y=3x-2$

又 $\begin{cases} y=3x-2 \\ y=x^3 \end{cases}$ ⇒ $x=-2$ 或 1（重根）

R 之面積 $=\int_{-2}^{1}[x^3-(3x-2)]dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\Big|_{-2}^{1}$

$=\frac{27}{4}$

(2)令 $3x-y=k$，x 截距愈大 ⟷ k 愈大，$f'(x)=3x^2=3$　∴ $x=\pm1$

①當 $(x，y)=(-1，-1)$，$k=3(-1)+1=-2$

②當 $(x，y)=(1，1)$，$k=3(1)-1=2$

③當 $(x，y)=(-2，-8)$，$k=3(-2)+8=2$

∴ 最大值＝2，最小值＝－2