

北一女中高一資訊科學概論

小型系統設計專案

班 級：溫

系統名稱：整係數方程式之換底

類 別：數學類

組 長：【14】徐維彤

組 員：【04】吳宜峯

【21】陳乃瑋

指導老師：陳怡芬 老師

系統總開發時間成本：3人×8小時×100元=2100元

授權方式：姓名標示-非商業性-相同方式分享 2.5 台灣

系統設計專案報告內容

一、動機

一上時數學課曾教到一章「多項方程式」，該章節中有個重要的例題：換底，例如：

$$\text{原方程式為：} x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x^1 + 1 = 0$$

即可更換為：

$$(x-1)^5 + 6(x-1)^4 + 15(x-1)^3 + 20(x-1)^2 + 15(x-1)^1 + 6 = 0$$

或者是

$$(x-2)^5 + 11(x-2)^4 + 49(x-2)^3 + 111(x-2)^2 + 129(x-2)^1 + 63 = 0$$

作法是用綜合除法不停的進行加法、乘法運算，期間還要隨著次方的增加來除以領導係數的次數，非常的繁雜，且容易出錯。

這個程式是設計給想要練習多項方程式換底的同學，自己算完後，交給程式驗算，可加快練習速度。

二、明確的定義欲解決問題

將整係數多項方程式換底，輸出新方程式。

三、系統功能

本程式具將多次方程式換底的功能。

其中 多次方程式之限制為：係數須為整數，正負不限。

底之限制：底為首項係數為 1 的一次整係數方程式。

四、解決策略

1. 開始：輸出提示語。
2. 使用者輸入是否開始運作程式。
3. 使用者輸入方程式最高次數。
4. 使用者輸入各次項係數。
5. 使用者輸入欲換之底。

考慮：

- (1) 可輸入各種一次方程式。
- (2) 可輸入各種係數為整數的方程式。
- (3) 可輸入一次項係數為 1、常數項為整數的方程式。

實作：

- (3) 可輸入一次項係數為 1、常數項為整數的方程式。

因為程式利用綜合除法做運算，故一次項係數為 1 會較單純。

6. 利用程式進行換底。
7. 輸出新方程式。
8. 使用者輸入是否重新開始。
9. 若是，返回 3. 供使用者繼續。
10. 若否，結束。

※ 綜合除法的原理：

$$\begin{aligned} \text{設 } a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 &= (x-c)(b_2x^2 + b_1x^1 + b_0) + r \\ &= b_2x^3 + (b_1 - cb_2)x^2 + (b_0 - cb_1)x + (r - cb_0) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_3 = b_2 \\ a_2 = b_1 - cb_2 \\ a_1 = b_0 - cb_1 \\ a_0 = r - cb_0 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} b_2 = a_3 \\ b_1 = a_2 + cb_2 \\ b_0 = a_1 + cb_1 \\ r = a_0 + cb_0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc|c} a_3 & + & a_2 & + & a_1 & + & a_0 & & c \\ & & & & cb_2 & + & cb_1 & + & cb_0 \\ \hline b_2 & + & b_1 & + & b_0 & + & r & & \end{array}$$

主 題 5 綜合除法應用

換底的實際數學作法及原理

應用 1 連續綜合除法

例： $f(x) = 8x^3 - 4x^2 - 12x + 1$

表多項式 (1) 將 $f(x)$ 表成 $(x-1)$ 的多項式 $= a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3$

(2) 將 $f(x)$ 表成 $(2x-1)$ 的多項式

解：(1) $8x^3 - 4x^2 - 12x + 1 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3$

$$\begin{array}{cccc|c} 8 & -4 & -12 & 1 & \\ & 8 & 4 & -8 & 1 \\ \hline 8 & 4 & -8 & -7 & \\ & 8 & 12 & & \\ \hline 8 & 12 & 4 & & \\ & 8 & & & \\ \hline 8 & 20 & & & \end{array}$$

$$= (x-1) \left[\frac{a_1 + a_2(x-1) + a_3(x-1)^2}{f(x) \div (x-1) \text{ 之商}} \right] + a_0 \quad f(x) \div (x-1)$$

商式 $= a_1 + a_2(x-1) + a_3(x-1)^2$ ，餘式 $= a_0 = -7$
 $= 8x^2 + 4x - 8$

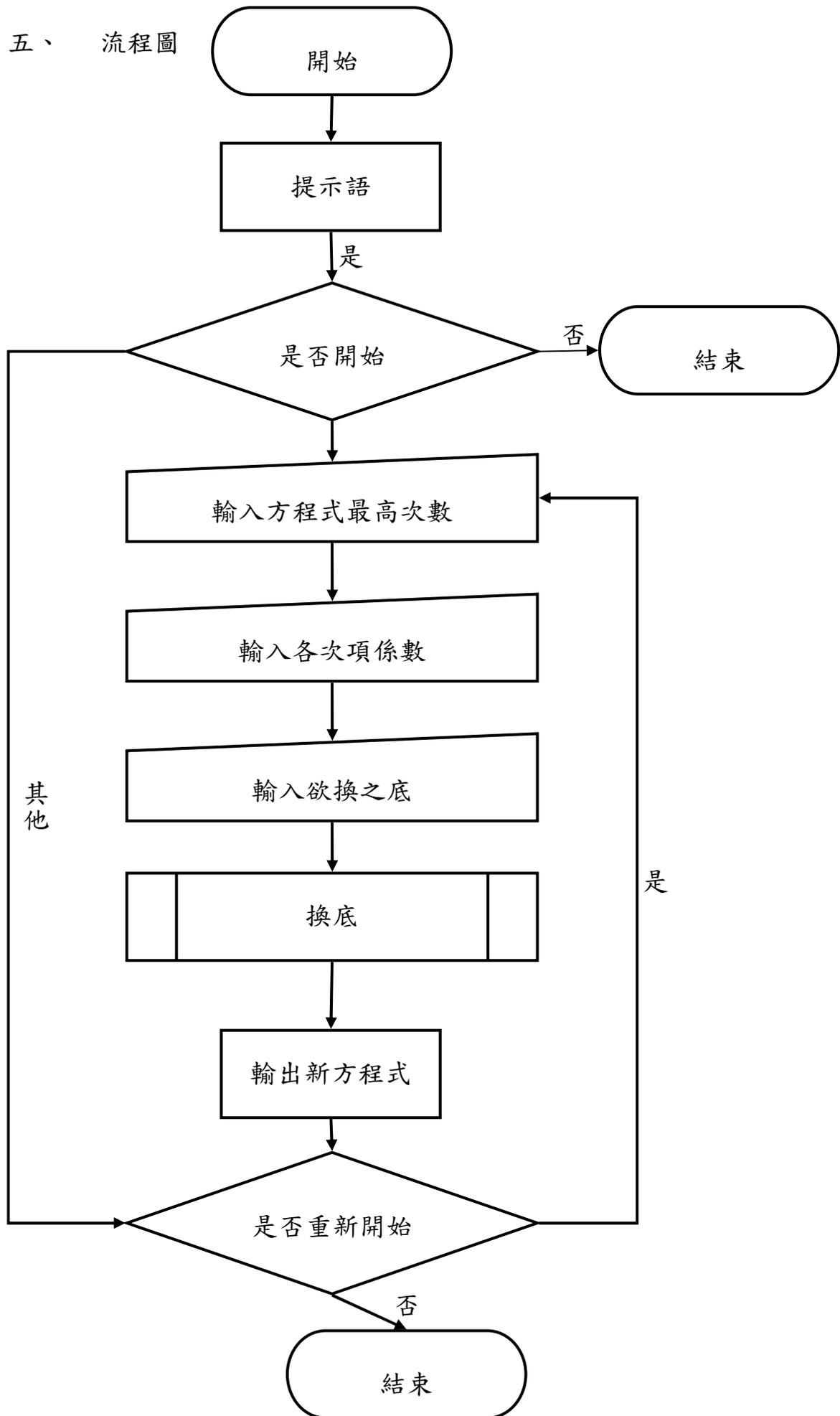
$= (x-1)(a_2 + a_3(x-1)) + a_1$
 商式 $= a_2 + a_3(x-1)$ ，餘式 $= a_1 = 4$
 $= 8x + 12$

商式 $= a_3$ ，餘式 $= a_2$
 $8x \quad 20$

A: $-7 + 4(x-1) + 20(x-1)^2 + 8(x-1)^3$

(2) $8x^3 - 4x^2 - 12x + 1 = b_0 + b_1(2x-1) + b_2(2x-1)^2 + b_3(2x-1)^3$

五、 流程圖



六、 程式碼

```
#include<stdlib.h>
#include<stdio.h>
#include<math.h>

int main ()
{   int num[100]={0};
    int x;/*x 的值*/
    int n;/*次方*/
    int k,y;/*n+1，因為要做&印 N+1 次*/
    int i,j,h,f,z,l;
    int final[100]={0};
    char continue;

    printf("歡迎您使用此系統\n");
    printf("本程式可運用於數學上「換底」的運算\n");
    printf("只要輸入 x 多項式的各次係數\n");
    printf("再鍵入 x 值，即可求出新的多項式\n");
    printf("\n");
    printf("開始測試？(Y/N)");

    while(1)
    {

        scanf("%c",&continue);
        if(continue=='Y' || continue=='y')

        {
            printf("x 多項式共有幾次方?(註：必為一正整數)\n");
            scanf("%d",&n);

            k=n+1; f=n; y=n+1 ;
            do{printf("請輸入 x 多項式的%d 次係數\n",n);
                i=k-n;
                scanf("%d",&num[i]);
            }while(n-->0);
```

```

printf("※若欲換之底為(x + )形式，請輸入「x - (- )」\n");
printf("請輸入欲換之底：x - ");
scanf("%d",&x);
printf("\n");

for(h=1;h<=f;h++)/*如此作法重複好幾次*/
{
    num[1]=num[1];
    for(l=2; l<=k; l++)
        {num[l]=(num[l-1]*x)+num[1];}
    final[k]= num[k];
    k--; /*一層*/
}

final[1]=num[1];

printf("x 多項式可表為：\n");
if(x>=0)
{ for(z=1;z<y;z++)
    {printf("%d\t(x-%d)^%d+\n",final[z],x,y-z);} //用\t對齊

    printf("%d\n",final[y]) ;
    printf("\n"); }

else
{ for(z=1;z<y;z++)
    {printf("%d\t(x+%d)^%d+\n",final[z],-x,y-z);}

    printf("%d\n",final[y]) ;
    printf("\n"); }
}

else if(continute=='N' || continute=='n'){break;}
else {printf("\n");}
printf("重新開始？(Y/N)");//問題：為什麼會印兩次呢？
}
system("pause");
return 0;}

```

七、 測試與修正

算式運用到了連續綜合除法，所以寫出這個系統的首要關鍵，就是先能做出單一的綜合除法。於是我們從能利用迴圈，自動將輸入的各次項係數存入字串開始著手，進而寫出單一綜合除法，再利用迴圈完成連續除法的雛形。最後則是修改一些細項，例如：是否重新開始？輸出值的對齊…等。

我們無法解決的問題有：

1. 此系統只能執行 x 的一次式換底。因為二次以上的換底作法，我們所學的並不是運用連續綜合除法，而是用原理完完全全不同的長除法。或許這一點我們可以再請問數學老師，得知能否用同樣的方法解決二次方以上的問題。
2. 僅能執行除式領導係數為 1 的除法。因為若 x 項係數不為 1 (例如： $3x+1$)，則 x 值會成為除不盡的分數，如此一來電腦的執行結果會非常不精準。且還需要多一道手續將商式化簡。關於這一點，我們想如果有更多的時間聚集討論，說不定可以想出因應對策。

八、 組員心得感想

組長：

其實我們這一組在製作的過程中非常和平，大家都了解「人多口雜」，因此幾乎沒有意見上的衝突。雖然開始起步的時間稍嫌太遲，是經過我的電話提醒才開始正式動手。但是組員們都在短促時間內完成分配下去的工作，效率真的非常高呢！

組員：

這個寒假作業感覺很特別，因為這次題目是自訂的，不同與以往的 ACM 題目，千辛萬苦寫出來後就上傳、封箱。這次的程式很實用，寫完後除了自己可以用，還可以造福其他有需要的人。不過這個題目做法雖然簡單，只要不停的用綜合除法運算就好，但要化為程式，令其不斷的運算實在是令人頭痛，好在有組長的清晰腦袋，用個雙迴圈加上陣列，簡單的就把綜合除法寫出來了。這次的合作讓我們學到很多，除了程式題目是隨處可見、俯拾及是的外，也體會到了天外有天，我們要多多寫題目了呢！

九、 誌謝

1. 數學課本提供的寶貴意見；數學老師奉送的扎實基礎
2. 組長維彤辛苦的緊密督促；組員潛力無窮的腎上腺素
3. 怡芬老師傳授的各式絕技；爸爸媽媽無限的寬容耐心